

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال اول ۱۴۰۵-۰۴
استاد: دکتر سحر قاجار، دکتر هانی احمدزاده

تمرین سری پنجم
دانشکده علوم ریاضی

محاسبه مشتقات جزئی

۱. نشان دهید اگر $z = \frac{x+y}{x-y}$ ، آنگاه $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

۲. نشان دهید برای $w = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ ، رابطه $xw_x + yw_y + zw_z = -2w$ برقرار است. ✓

۳. اگر $z = f(x^2 + y^2)$ که در آن f تابعی مشتقپذیر است، نشان دهید $yz_x - xz_y = 0$. ✓

بررسی پیوستگی، مشتقپذیری و محاسبات مشتقات جزئی مراتب بالاتر توابع چند متغیره

۴. نشان دهید تابع دو متغیره f در نقطه $(0, 0)$ پیوسته نیست، ولی $f_1(0, 0)$ و $f_2(0, 0)$ وجود دارند. ✓

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

۵. مشتقات جزئی تابع f را در نقطه $(0, 0)$ ، در صورت وجود، بیابید. سپس مشتق جزئی $f_1(x, y)$ را برای این تابع محاسبه کنید. آیا f در $(0, 0)$ پیوسته است؟ ✓

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

۶. مشتقات جزئی تابع f را در همه نقاط بیابید. آیا f و مشتقاتش در $(0, 0)$ پیوسته‌اند؟

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

۷. برای تابع

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

$f_1(0, 0, 0), f_2(0, 0, 0), f_3(0, 0, 0)$ را یافته و پیوستگی آنها را در نقطه $(0, 0, 0)$ بررسی کنید.

مشتقات جزئی مراتب بالاتر

در تمرین‌های ۸ تا ۱۱، تمام مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع داده شده را بیابید.

$$8. \quad z = xe^y - ye^x \quad \checkmark$$

$$9. \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$10. \quad z = \sqrt{3x^2 + y^2}$$

$$11. \quad f(x, y) = \ln(1 + \sin(xy)) \quad \checkmark$$

تابعهای هارمونیک

در تمرینهای ۱۲ تا ۱۵، نشان دهید توابع داده شده در نواحی مشخص شده هارمونیک هستند.

$$12. \quad f(x, y) = A(x^2 - y^2) + Bxy \quad (\text{در کل صفحه، } A \text{ و } B \text{ ثابت‌اند})$$

$$13. \quad f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (\text{در همه جا به جز مبدأ})$$

$$14. \quad f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{به جز نقاط روی محور } y) \quad \checkmark$$

$$15. \quad \text{نشان دهید تابع } w = e^{3x+4y} \sin(5z) \text{ در تمام فضای سه بعدی } \mathbb{R}^3 \text{ هارمونیک است، یعنی: } \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

$$16. \quad \text{فرض کنید } u(x, y) \text{ و } v(x, y) \text{ مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته دارند و در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند:}$$

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

نشان دهید هر دو تابع u و v هارمونیک هستند.

$$17. \quad \text{نشان دهید } u(x, y) \text{ دوهارمونیک است اگر و تنها اگر در معادله دوهارمونیک زیر صدق کند:}$$

$$u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0.$$

$$18. \quad \text{نشان دهید اگر } u(x, y) \text{ هارمونیک باشد، آنگاه توابع زیر دوهارمونیک هستند: } \checkmark$$

$$v(x, y) = x u(x, y), \quad w(x, y) = y u(x, y).$$

با استفاده از نتیجه تمرین ۱۸، نشان دهید توابع زیر دوهارمونیک‌اند:

$$19. \quad xe^x \sin y$$

$$20. \quad y \ln(x^2 + y^2) \quad \checkmark$$

$$21. \quad \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

قانون زنجیره‌ای

در تمرینهای ۲۲ تا ۲۶، قاعده زنجیره‌ای مناسبی برای مشتقات خواسته شده بنویسید. ✓

۲۲. مشتق $\partial w / \partial t$ ، اگر:

$$w = f(x, y, z), \quad x = g(s, t), \quad y = h(s, t), \quad z = k(s, t)$$

۲۳. مشتق dw/dt ، اگر:

$$w = f(x, y), \quad x = g(r, s), \quad y = h(r, t), \quad r = k(s, t), \quad s = m(t)$$

۲۴. اگر:

$$w = f(x, y, z), \quad x = g(y, z), \quad y = h(z),$$

نسخه‌های مناسب قاعده زنجیره‌ای را برای:

$$\frac{dz}{dw}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_x, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{x,y}$$

بنویسید.

توجه: در کلاس حل تمرین، فقط سوالاتی که جلوی آنها تیک قرمز زده شده حل می‌شوند.