



به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال اول ۱۴۰۵-۰۴
استاد: دکتر سحر قاجار، دکتر هانی احمدزاده

تمرین سری چهارم
دانشکده علوم ریاضی

در تمرین‌های ۱ تا ۶، دامنه توابع زیر را مشخص کنید.

۱. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

۲. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$

۳. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

۴. $f(x, y) = \sin^{-1}(x + y)$

✓ ۵. $f(x, y) = \ln(1 + xy)$

✓ ۶. $f(x, y, z) = \frac{e^{xyz}}{\sqrt{xyz}}$

در تمرین‌های ۷ تا ۱۱، نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

۷. $f(x, y) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 1$

✓ ۸. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

۹. $f(x, y) = 4 - x^2$

✓ ۱۰. $f(x, y) = |x| + |y|$

✓ ۱۱. $f(x, y) = 6 - x - 2y$

در تمرین‌های ۱۲ تا ۱۴، منحنی‌های تراز توابع داده شده را رسم کنید.

۱۲. $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$

۱۳. $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

✓ ۱۴. $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$

در تمرین‌های ۱۵ تا ۱۷، سطوح تراز توابع داده شده را توصیف کنید.

۱۵. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$

۱۶. $f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$

✓ ۱۷. $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$

در تمرین‌های ۱۸ تا ۲۵، استدلال کنید که چرا حد وجود دارد، سپس حاصل حد را محاسبه کنید.

$$۱۸. \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (xy + x^2)$$

$$۱۹. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$۲۰. \checkmark \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$$

$$۲۱. \checkmark \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos y}$$

$$۲۲. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$$

$$۲۳. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$$

$$۲۴. \checkmark \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{2x^2-xy}{4x^2-y^2}$$

$$۲۵. \checkmark \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

۲۶. اعداد صحیح نامنفی m, n, p را چنان بیابید تا حد

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p}$$

وجود داشته باشد. $\checkmark$

۲۷. مقادیر a, b, c را چنان تعیین کنید که حد

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{ax^2 + bxy + cy^2}$$

وجود داشته باشد.

در تمرین‌های ۲۸ و ۲۹، مشتقات جزئی اول توابع داده شده را در نقطه $(0,0)$ (با استفاده از تعریف) بیابید.

$$۲۸. \checkmark f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^2}{x^2 + 3y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$۲۹. f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2y^2}{x - y}, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

در تمرین‌های ۳۰ تا ۳۵، معادله صفحه مماس و خط نرمال را برای نمودار توابع داده شده در نقطه داده شده بیابید.

$$۳۰. f(x,y) = \cos(x/y) \quad \text{در نقطه } (\pi, 4)$$

$$۳۱. f(x,y) = ye^{-x^2} \quad \text{در نقطه } (0, 1)$$

$$32. \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad \text{در نقطه } (1, -2) \quad \checkmark$$

$$33. \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{در نقطه } (0, 2)$$

$$34. \quad f(x, y) = \tan^{-1}(y/x) \quad \text{در نقطه } (1, -1)$$

$$35. \quad f(x, y) = \sqrt{1 + x^3 y^2} \quad \text{در نقطه } (2, 1) \quad \checkmark$$

$$36. \quad \text{همه صفحه‌های افقی مماس بر سطح } z = xy e^{-(x^2 + y^2)/2} \quad \text{را بیابید و نقاط تماس را تعیین کنید.} \quad \checkmark$$

$$37. \quad \text{فاصله نقطه } (0, 0, 1) \quad \text{را از رویه } z = x^2 + 2y^2 \quad \text{محاسبه کنید.} \quad \checkmark$$

توجه: در کلاس حل تمرین، فقط سوالاتی که جلوی آنها تیک قرمز زده شده حل می‌شوند.