

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۱۴۰۵-۰۴
استاد: دکتر سحر قاجار، دکتر هانی احمدزاده
تمرین سری سوم
دانشکده علوم ریاضی

مسائل مربوط به بردار مکان، سرعت، شتاب و مسیر ذره بخش ۱۱.۱ صفحه ۶۳۵ کتاب آدامز
در تمرین‌های ۱ تا ۶، سرعت، تندى (قدر مطلق سرعت)، و شتاب را در زمان t برای ذره‌ای که بردار مکان آن $\mathbf{r}(t)$ داده شده است، بیابید و مسیر حرکت ذره را توصیف کنید.

۱. $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + \mathbf{k}$

۲. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

۳. $\checkmark \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

۴. $\checkmark \mathbf{r}(t) = a \cos(\omega t)\mathbf{i} + b\mathbf{j} + a \sin(\omega t)\mathbf{k}$

۵. $\checkmark \mathbf{r}(t) = ae^t\mathbf{i} + be^t\mathbf{j} + ce^t\mathbf{k}$

۶. $\mathbf{r}(t) = a \cos t \sin t \mathbf{i} + a \sin^2 t \mathbf{j} + a \cos t \mathbf{k}$

مشتقات برداری و قوانین ضرب
در تمرین‌های ۷ تا ۱۲ فرض کنید که توابع برداری داده‌شده مشتقات پیوسته با مرتبه‌های لازم دارند.

۷. نشان دهید که:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{u}}{dt^3}.$$

۸. قاعده ضرب را برای $\frac{d}{dt}[\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]$ بنویسید.

۹. قاعده ضرب را برای $\frac{d}{dt}[\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]$ بنویسید. $\checkmark$

۱۰. عبارت زیر را بسط دهید و ساده کنید: $\checkmark$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{u} \times \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) \right).$$

۱۱. عبارت زیر را بسط دهید و ساده کنید: $\checkmark$

$$\frac{d}{dt} [(\mathbf{u} + \mathbf{u}'') \bullet (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')].$$

۱۲. عبارت زیر را بسط دهید و ساده کنید:

$$\frac{d}{dt} [(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \bullet (\mathbf{u}' \times \mathbf{u}'')].$$

مسائل مربوط به تقاطع استوانه‌ها و سطوح — پارامتری‌سازی منحنی بخش ۱۱.۳ صفحه ۶۴۹ کتاب آدامز

۱۳. استوانه‌های $z = x^2$ و $z = 4y^2$ در دو منحنی با یکدیگر تلاقی دارند که یکی از آن‌ها از نقطه $(2, -1, 4)$ می‌گذرد. با استفاده از $t = y$ به عنوان پارامتر، یک پارامتری‌سازی برای آن منحنی بیابید. ✓

۱۴. صفحه $x + y + z = 1$ استوانه $z = x^2$ را در یک سهمی قطع می‌کند. سهمی را با استفاده از $t = x$ پارامتری‌سازی کنید.

در تمرین‌های ۱۵ تا ۱۸، منحنی تقاطع سطوح داده‌شده را پارامتری‌سازی کنید. توجه کنید که پاسخ یکتا نیست.

$$x^2 + y^2 = 9, \quad z = x + y. \quad ۱۵.$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x + y = 1. \quad ۱۶. \quad \checkmark$$

$$z = x^2 + y^2, \quad 2x - 4y - z - 1 = 0. \quad ۱۷. \quad \checkmark$$

$$yz + x = 1, \quad xz - x = 1. \quad ۱۸. \quad \checkmark$$

مسائل مربوط به بردار مماس واحد بخش ۱۱.۴ صفحه ۶۵۸ کتاب آدامز

در تمرین‌های ۱۹ تا ۲۲، بردار مماس واحد $T(t)$ را برای منحنی‌های زیر بیابید:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 2t^2\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}. \quad ۱۹.$$

$$\mathbf{r}(t) = a \sin(\omega t)\mathbf{i} + a \cos(\omega t)\mathbf{k}. \quad ۲۰.$$

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \sin t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}. \quad ۲۱.$$

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}. \quad ۲۲. \quad \checkmark$$

مسائل مربوط به توصیف منحنی، طول قوس، انحنا و تاب بخش ۱۱.۵ صفحه ۶۴۹، ۶۷۶ کتاب آدامز

۲۳. منحنی پارامتری

$$\mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + (2\pi - t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

توصیف کرده و طول آن را بیابید. ✓

۲۴. انحنا و تاب منحنی $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + \sqrt{2}t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$ را در یک نقطه دلخواه از منحنی پیدا کنید. ✓

۲۵. طول منحنی $\mathbf{r}(t) = at^2 \mathbf{i} + bt \mathbf{j} + c \ln t \mathbf{k}$ ، $1 \leq t \leq T$ را به صورت یک انتگرال معین بنویسید و اگر $b^2 = 4ac$ باشد آن را محاسبه کنید. ✓

۲۶. منحنی پارامتری $x = a \cos t \sin t$ ، $y = a \sin^2 t$ ، $z = bt$ را توصیف کنید و طول آن را بین $t = 0$ و $t = T > 0$ بیابید.

۲۷. برای منحنی $x = e^t \cos t$ ، $y = e^t \sin t$ ، $z = t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ ، طول منحنی را پیدا کنید.

توجه: در کلاس حل تمرین، فقط سوالاتی که جلوی آنها تیک قرمز زده شده حل می‌شوند.