

به نام خدا



درس ریاضی عمومی ۲ ... نیمسال اول ۵-۴
استاد: سحر قاجار، هانی احمدزاده
تمرین سری دوم
دانشکده علوم ریاضی

۱. اشتراک صفحه $z = 1 + x$ با مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ سهموی است. این سهموی را به سه روش پارامتری کنید. (هر بار هرکدام از متغیرها را برابر با t بگیرید). کدام یک از این انتخاب‌ها برای t منجر به پارامتری‌سازی می‌شود که نمایانگر کل سهموی است؟ آن پارامتری‌سازی چیست؟ چه اتفاقی برای دو انتخاب دیگر می‌افتد؟

۲. مقادیر $x^T x$, xx^T و $x^T Ax$ را در صورتی حساب کنید که:

$$A = \begin{bmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

۳. نشان دهید که اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد که $a_{ij} = 0$ برای $i > j$ (ماتریس A بالامثلی باشد)، آنگاه

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}$$

یعنی دترمینان ماتریس A برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر اصلی آن است.

۴. ثابت کنید که برای هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

(با استفاده از استقرا بر روی n).

۵. نشان دهید که:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x,$$

و

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y).$$

سعی کنید این نتیجه را به حالت $n \times n$ تعمیم دهید.

۶. برای ماتریس:

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

نشان دهید که:

$$(A_\theta)^T = (A_\theta)^{-1} = A_{-\theta}$$

۷. (آ) وارون ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

را با استفاده از فرایند حذف گاوس-جردن محاسبه کنید.

(ب) دستگاه معادلات خطی

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ -x + y = 1 \\ 2x + y + 3z = 13 \end{cases}$$

را با استفاده از فرایند حذف گاوسی و جایگذاری پسرو حل کنید.

(پ) دستگاه معادلات خطی قسمت (ب) را به صورت $Ax = b$ بنویسید، که در آن، A همان ماتریس معرفی شده در

قسمت (آ) و $b = [-2 \ 1 \ 13]^T$. سپس با استفاده از وارون ماتریس A که در قسمت (آ) محاسبه کردید، جواب دستگاه را به دست آورید.

(ت) دستگاه معادلات خطی قسمت (ب) را با استفاده از قاعده کرامر حل کنید.

۸. چندجمله‌ای مشخصه ماتریس مربعی $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ در نظر بگیرید. فرض کنید که $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

(آ) نشان دهید $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

(ب) ثابت کنید ماتریس A وارون پذیر است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس A ناصفر باشند.

(پ) رد (تریس) ماتریس A را به صورت $\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ تعریف کنید. سپس نشان دهید $\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j$.

(ت) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس وارون پذیر A باشد آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.

(ث) مقادیر ویژه ماتریس A^T همان مقادیر ویژه ماتریس A هستند.

۹. رویه درجه دوی $0 = y^2 - 2xz + 2z + 1$ را در نظر بگیرید.

(آ) با معرفی ماتریس A ، بردار b و اسکالر c ، معادله رویه در فرم ماتریسی را به صورت $\frac{1}{2}x^T Ax + x^T b + c = 0$

بنویسید، که در آن $x = [x \ y \ z]$.

(ب) چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A را تشکیل دهید. سپس نشان دهید که $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و $\lambda = -1$ مقادیر

ویژه ماتریس A هستند. دو بردار ویژه مستقل خطی u و v متناظر به مقدار ویژه $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ و بردار ویژه w متناظر به مقدار ویژه $\lambda_3 = -1$ ارائه کنید. سپس با اجرای روند گرام-اشمیت روی بردارهای u, v, w سه

بردار ویژه یکه، و دو به دو متعامد برای ماتریس A بیابید.

(پ) تجزیه طیفی ماتریس A را به صورت $A = U\Lambda U^T$ بنویسید، که در آن U ماتریسی متعامد و یکه ($U^T = U^{-1}$) و Λ ماتریسی قطری است.

(ت) با تغییر متغیر $y = U^T x$ ، یا به طور معادل $x = Uy$ ، رویه درجه دو را به فرم استاندارد بنویسید. سپس نوع رویه را مشخص کنید.

۱۰. در هر بخش با استفاده از رویکرد اعلام شده، مشخص کنید که ماتریس متقارن داده شده، معین مثبت، معین منفی، نیمه معین مثبت، نیمه معین منفی، یا نامعین است.

(آ) با محاسبه مقادیر ویژه،

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(ب) با اجرای فرایند حذف گاوسی بدون جابجایی سطرها،

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(پ) با محاسبه دترمینان زیرماتریس‌های اصلی پیشرو،

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(ت) با محاسبه مقادیر ویژه،

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ث) با اجرای فرایند حذف گاوسی بدون جابجایی سطرها،

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$