



به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال اول ۱۴۰۵-۱۴۰۴
استاد: دکتر هانی احمدزاده، دکتر سحر قاجار
تمرین سری اول
دانشکده علوم ریاضی

۱- برای دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^3$ که هم‌راستای یکدیگر نیستند، مجموعه‌های زیر را با دلیل به صورت هندسی توصیف کنید.

- الف) $\{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
- ب) $\{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \geq 0\}$
- ج) $\{\lambda u + (1 - \lambda)v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
- د) $\{\lambda u + (1 - \lambda)v \mid \lambda \geq 0\}$
- ه) $\{\lambda u + (1 - \lambda)v \mid \lambda \in [0, 1]\}$
- و) $\{\lambda u + \mu v \mid \lambda + \mu \leq 1, \lambda, \mu \geq 0\}$

۲- برای سه بردار $u = 2i + j - 2k$ و $v = i + 2j - 2k$ و $w = 2i - 2j + k$ به موارد زیر پاسخ دهید:

۱. دو بردار یک‌ه عمود بر هر دو بردار u و v عمود باشد را بیابید.
۲. بردار $x \in \mathbb{R}^3$ را چنان بیابید که:

$$\begin{aligned}x \cdot u &= 9, \\x \cdot v &= 4, \\x \cdot w &= 6.\end{aligned}$$

۳. دو بردار یک‌ه را چنان بیابید که زاویه‌ی برابر با بردارهای u, v و w داشته باشند.
۴. بردار یک‌ه ای که نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار u و v باشد را معرفی کنید.

۳- برای اعداد حقیقی r, s, t که $r \neq 0, s \neq 0$ و بردار a صادق در شرط $|a|^2 \geq 4rst$ بردارهای x و y را چنان بیابید که

$$\begin{cases} rx + sy = a, \\ x \cdot y = t. \end{cases}$$

۴- یک چهاروجهی هرمی است با قاعده مثلثی و سه وجه مثلثی دیگر. چهاروجهی دارای چهار رأس و شش ضلع است. حجم آن مانند هرم یا مخروط مساوی با $\frac{1}{3}Ah$ است، که در آن A مساحت قاعده و h ارتفاع عمود بر قاعده می باشد. اگر u, v, w بردارهای منطبق بر سه ضلع چهاروجهی باشند که در یک رأس متقاطع اند، نشان دهید که چهاروجهی دارای حجم زیر است:

$$\frac{1}{6} |u \cdot (v \times w)| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

۵- زاویه میان خطوط زیر را بدست آورید.

$$L_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{-z-3}{3}$$

$$L_2 : -x-2 = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$$

۶- معادله صفحه گذرنده از نقطه $(-1, 0, 2)$ و گذرنده از فصل مشترک دو صفحه $x+3y-z=0$ و $x-4y+2z=5$ را بیابید.

۷- مجموعه نقاطی از فضای $\mathbb{R}^3$ که در معادلات یا نامعادلات زیر صدق می کند توصیف کنید و در صورت امکان آن را رسم کنید.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4 \quad \text{الف)}$$

$$x \geq \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{ب)}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ و } x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{ج)}$$

$$z \geq x \text{ و } x^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{د)}$$

$$z = y \text{ و } x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ه)}$$

۸- فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_k$ و B نقاطی از $\mathbb{R}^n$ باشند. ثابت کنید اگر $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه ای مستقل خطی باشد و $\{A_1 + B, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه ای وابسته خطی، آنگاه $\{A_1 - B, A_2, \dots, A_k\}$ مجموعه ای مستقل خطی است.