

تمرین سری هفتم

تمرین ۱

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $(1, 8)$ را از منحنی $y = 1 + x^{3/2}$ بیابید.

تمرین ۲

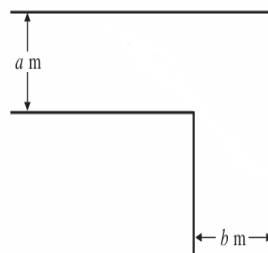
مجموعه مخروط‌های قائم با سطح مقطع دایره که کره‌ای با شعاع R را در برمی‌گیرند، در نظر بگیرید. کم‌ترین حجم ممکن از میان این مخروط‌ها را محاسبه کنید.

تمرین ۳

یک پنجره با محیط 10 متر بوده و به شکل مستطیل است که ضلع فوقانی آن با یک نیم‌دایره عوض شده است. ابعاد مستطیل را در صورتی بیابید که پنجره بیش‌ترین نور را دریافت کند.

تمرین ۴

دو دالان عمود بر هم با عرض‌های a و b که $0 \leq b \leq a$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم میله‌ای به طول l را در حالت افقی از دالان به عرض a به دالان به عرض b ببریم. بزرگ‌ترین مقدار l را پیدا کنید که اگر $l \leq l$ این کار امکان پذیر باشد.



تمرین ۵

اگر طول ضلع یک مربع از ۱۰ سانتی متر به $۱۰/۴$ سانتی متر افزایش یابد، مساحت آن تقریباً چقدر زیاد می شود؟

تمرین ۶

فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

نشان دهید f بر $[0, \infty)$ پیوسته و بر $(0, \infty)$ مشتق پذیر است ولی در نقطه‌ی $x = 0$ نه ماکزیمم موضعی دارد نه مینیمم موضعی.

تمرین ۷

برای توابع داده شده، مقادیر اکسترمم موضعی را (در صورت وجود) بدست آورید و رده بندی کنید. معین کنید که این مقادیر اکسترمم مطلق اند یا خیر. نمودار تابع را نیز رسم کنید.

الف) $f(x) = (x - 1)^{2/3} - (x + 1)^{2/3}$

ب) $f(x) = x^5 + x^3 - 2x$ روی دامنه‌ی $[a, b]$.

ج) $f(x) = x - 2 \tan^{-1} x$.

د) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

تمرین ۸

برای توابع داده شده، نقاط عطف را بیابید.

الف) $f(x) = (3 - x^2)^2$.

ب) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$.

ج) $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

د) $f(x) = x + \sin 2x$.

تمرین ۹

برای توابع داده شده، نقاط بحرانی را محاسبه کنید. سپس نقاط بحرانی را با استفاده از آزمون مشتق دوم (هر جا که ممکن بود) رده‌بندی کنید.

$$f(x) = x(x - 2)^2 + 1 \quad (\text{آ})$$

$$f(x) = x \ln x \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = xe^x \quad (\text{ج})$$

تمرین ۱۰

چندجمله‌ای‌های تیلور مذکور برای توابع زیر را با استفاده از تعریف چندجمله‌ای تیلور حساب کنید.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{برای } n \text{ درجه } \quad \text{حول } x = 1 \quad (\text{آ})$$

$$f(x) = \sec x \quad \text{برای } 3 \text{ درجه } \quad \text{حول } x = 0 \quad (\text{ب})$$

تمرین ۱۱

با ترکیب مناسبی از چندجمله‌ای‌های تیلور برای $\ln(1+x)$ و $\ln(1-x)$ حول $x = 0$ چندجمله‌ای تیلور از درجه‌ی $2n+1$ حول $x = 0$ برای

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

را پیدا کنید.

تمرین ۱۲

مقدار $\cos(0.1)$ را با خطای کمتر از 10^{-4} محاسبه کنید.