

(پاییز ۱۴۰۴)

ریاضی عمومی ۱

تمرین سری ششم

تمرین ۱

نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ وارون پذیر است و $(f^{-1})'(2)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۲

با استفاده از تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نشان دهید:

$$e^\pi > \pi^e.$$

تمرین ۳

برای تابع $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}$ ، مقادیر $f'(1)$ و $f'(2)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۴

مشتق تابع $f(x) = x - \sin^{-1}(\sin x)$ را در بازه $-\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ محاسبه کنید. نمودار تابع را در این بازه رسم کنید.

تمرین ۵

عبارت‌های زیر را ساده کنید.

ا) $\sin(\cos^{-1} x)$

ب) $\sin^{-1}(\cos x)$ ، $0 \leq x \leq \pi$

ج) $\sin(\tan^{-1} x)$

د) $\tan(\cos^{-1} x)$

تمرین ۶

آ) نشان دهید تابع $f(x) = x^x$ بر بازه $[e^{-1}, \infty)$ اکیدا صعودی است.

ب) اگر g وارون تابع f در قسمت (آ) فرض شود، نشان دهید:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{g(y) \ln(\ln y)}{\ln y} = 1.$$

تمرین ۷

عبارت‌های زیر را ساده کنید.

آ) $\sinh \ln x$

ب) $\cosh \ln x$

ج) $\tanh \ln x$

د) $\frac{\cosh \ln x + \sinh \ln x}{\cosh \ln x - \sinh \ln x}$

تمرین ۸

نشان دهید:

$$\tanh^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) = 2 \tanh^{-1} x, \quad |x| < 1.$$