

تمرین سری پنجم

تمرین ۱

برای هر $x \in (0, \pi/2)$ نشان دهید که $\tan x > x$.

تمرین ۲

فرض کنید $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ همه جا مشتق پذیر است و $f'(x) = \frac{x^2 \sin x}{1+x^2}$. نشان دهید برای هر a و b داریم:

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{|a - b|}{2}.$$

تمرین ۳

برای اعداد a و b که $0 < a < b$ نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$ae^a < \frac{e^b - e^a}{\ln b - \ln a} < be^b$$

تمرین ۴

نرخ تغییر حجم یک کره نسبت به سطح جانبی اش زمانی که شعاع آن ۲ متر است را محاسبه کنید.

تمرین ۵

برای هر کدام از توابع زیر، ناحیه‌هایی که در آن‌ها تابع یکنوا (صعودی یا نزولی) است را مشخص کنید:

(آ) $y = x^3 + 6x^2$

(ب) $y = x + 2 \sin x$

(ج) $y = \frac{1}{x^2+1}$

تمرین سری پنجم

تمرین ۶

برای تابع $x = y^3 - y^2 + y''$ را بدست آورید.

تمرین ۷

برای تابع $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ ، حاصل $(f^{-1})'(-2)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۸

فرض کنید که $f(x) = a^x$ در $x = 0$ مشتق پذیر است و به ازای $0 \neq k$ داریم $f'(0) = k$. ثابت کنید f در هر عدد حقیقی x مشتق پذیر است و

$$f'(x) = ka^x = kf(x).$$

با استفاده از نتیجه بالا، ثابت کنید $f^{-1}(x) = \log_a x$ در هر $x > 0$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{kx}.$$

تمرین ۹

(آ) فرض کنید $F_{A,B}(x) = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$. نشان دهید:

$$\frac{d}{dx} F_{A,B}(x) = F_{A+B, B-A}(x).$$

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (آ)، موارد زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{d^4}{dx^4} F_{A,B}(x) \quad (\text{آ})$$

$$\frac{d^4}{dx^4} e^x \cos x \quad (\text{ب})$$

تمرین ۱۰

نشان دهید تابع $f(x) = \sin x - x$ روی اعداد حقیقی وارون پذیر است و این تابع وارون در سراسر اعداد حقیقی پیوسته است، ولی تابع وارون در مبدا مشتق پذیر نیست.