

تمرین سری سوم

تمرین ۱

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$ آنگاه، حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ بیابید.

تمرین ۲

با استفاده از قواعد حد و قبول این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، در هر قسمت حد خواسته شده را محاسبه کنید.

آ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

تمرین ۳

درستی یا نادرستی موارد زیر را بررسی کنید. موارد درست را اثبات کنید و برای موارد غلط مثال نقض بیاورید.

آ) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشد ولی $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ موجود نباشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود نیست.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ هر دو موجود نباشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود نیست.

ج) اگر $f(x) < g(x)$ برای هر x در یک همسایگی نقطه‌ی a ، و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ هر دو موجود باشند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

تمرین ۴

در هر قسمت حد خواسته شده را محاسبه کنید یا توضیح دهید چرا حد وجود ندارد.

آ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 4x^2}{x^2 - x^3}$

تمرین سری سوم

ب) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$

ه) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x-2}$

و) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1|-|2x+1|}{x}$

تمرین ۵

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که

ا) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1-4x^2}{1-2x}}{1-2x} = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$

د) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$

ه) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

تمرین ۶

اگر تابع f در L پیوسته و $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ ، آنگاه ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right).$$

تمرین ۷

فرض کنید که تابع f روی بازه‌ی بسته $[0, 1]$ پیوسته و برای هر $x \in [0, 1]$ داریم $0 \leq f(x) \leq 1$. ثابت کنید که $c \in [0, 1]$ وجود دارد که $f(c) = c$.

تمرین ۸

اگر f روی $[a, b]$ پیوسته و $x_1, \dots, x_n$ نقاط دلخواه از $[a, b]$ باشند، ثابت کنید $a \leq c \leq b$ موجود است که

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

تمرین سری سوم

تمرین ۹

نشان دهید معادله $x^3 - 15x + 1 = 0$ ، دارای سه ریشه در بازه $[-4, 4]$ است.

تمرین ۱۰

فرض کنید f تابعی پیوسته روی بازه $[0, 1]$ باشد و $f(0) = f(1)$. برای هر عدد صحیح $n \geq 2$ ، ثابت کنید $a \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ وجود دارد که $f(a) = f(a + \frac{1}{n})$.

تمرین ۱۱

اگر برای تابع پیوسته f عدد a موجود باشد که $f(f(f(a))) = a$ ، آنگاه ثابت کنید عدد c چنان موجود است که $f(c) = c$.

تمرین ۱۲

ثابت کنید اگر $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، $f \circ f$ نزولی اکید نیست.