

تمرین سری دوم

تمرین ۱

هر یک از اعداد مختلط داده شده را در فرم قطبی بنویسید و سپس مقادیر zw و $\frac{z}{w}$ را محاسبه کنید.

$$z = 3 + i\sqrt{3} \quad (\text{آ})$$

$$w = -1 + i\sqrt{3} \quad (\text{ب})$$

تمرین ۲

ثابت کنید در صفحه مختلط، z_1, z_2, z_3 راس‌های مثلثی متساوی الاضلاع هستند اگر و تنها اگر

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

تمرین ۳

عبارات زیر را ساده کنید.

$$\frac{1+i}{i(2+3i)} \quad (\text{آ})$$

$$\frac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)} \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{1+i} \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt{1+\sqrt{i}} \quad (\text{د})$$

تمرین ۴

ثابت کنید:

$$(1 - i\sqrt{3})^{-10} = -2^{-11}(1 + i\sqrt{3})$$

تمرین سری دوم

تمرین ۵

نشان دهید:

$$\sin 5t = 16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t.$$

تمرین ۶

ثابت کنید که اگر دنباله‌ی $\{|a_n|\}$ کران‌دار باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز کران‌دار است.

تمرین ۷

ثابت کنید که اگر دنباله‌ی $\{|a_n|\}$ همگرا به صفر باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگرا به صفر است.

تمرین ۸

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را چنان در نظر بگیرید که $a_1 = 3$ و $a_{n+1} = \sqrt{15 + 2a_n}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$. نشان دهید که دنباله‌ی $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار، و در نتیجه همگراست. سپس حد این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین ۹

- (آ) ثابت کنید که دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.
- (ب) ثابت کنید که دنباله‌ی $\{b_n\}$ با ضابطه‌ی $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.
- (ج) ثابت کنید که دنباله‌ی $\{b_n\}$ که در قسمت (ب) این سوال معرفی شده است، از بالا کران‌دار است.
- (د) بر اساس نتایج بدست آمده در قسمت‌های قبل ثابت کنید که دنباله‌ی $\{b_n\}$ همگراست. حد دنباله‌ی b_n را عدد نپر می‌نامند و با e نمایش می‌دهند.

تمرین ۱۰

در مورد هر یک از دنباله‌های زیر موارد زیر را بررسی کنید:

- ۱- کران‌داری (از بالا یا از پایین)
- ۲- مثبت یا منفی بودن
- ۳- صعودی یا نزولی یا نوسانی بودن
- ۴- همگرایی، واگرایی یا واگرایی به ∞ یا $-\infty$

تمرین سری دوم

(آ) $\left\{ \sin \frac{1}{n} \right\}$

(ب) $\left\{ \frac{n^2-1}{n} \right\}$

(ج) $\left\{ \frac{e^n}{\pi^{n/2}} \right\}$

(د) $\left\{ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right\}$

(ه) $\left\{ \frac{\sin n}{n} \right\}$

تمرین ۱۱

حد دنباله‌های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:

(آ) $a_n = \frac{n^2-2\sqrt{n}+1}{1-n-2n^2}$

(ب) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

(ج) $a_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$

(د) $a_n = \left(\frac{n-2}{n} \right)^n$

(ه) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}$

(و) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(ز) $a_n = \frac{\pi^n}{1+2^n}$