

تمرین سری سوم

مدرس: دکتر امیر دانشگر

تمرین ۱

آ) سری فوری تابع متناوب f با دوره تناوب 2π که ضابطه آن در بازه $-\pi \leq x < \pi$ به صورت $f(x) = x(1 + e^{ix})$ است را بدست آورید.

ب) سری فوری توابع متناوب f و g با دوره تناوب 2π ، که ضابطه آنها در بازه $-\pi \leq x < \pi$ در شکل ۱ مشخص شده‌اند، را به صورت زیر در نظر بگیرید،

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}, \quad g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{inx}.$$

برای تابع

$$h(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t) dt$$

با ضرائب فوريه γ_n تحقيق كنيد كه $\gamma_n = \alpha_n \beta_n$.

تمرین ۲

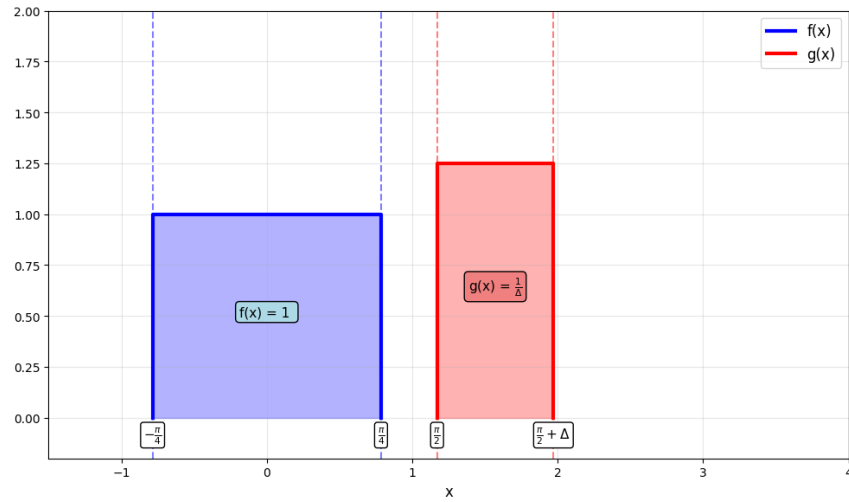
آ) فرض کنید $\mathcal{F}$ مجموعه تمام توابع $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ با محمل متناهی باشد یعنی

$$|\{n \in \mathbb{Z} : f(n) \neq 0\}| < \infty.$$

همچنین، تعريف می‌کنیم $\delta(n) \triangleq \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 0 & n \neq 0. \end{cases}$ تحقيق كنيد برای هر $f \in \mathcal{F}$ داریم،

$$f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \delta(n-k).$$

تمرین سری سوم



شکل ۱: یک دوره تناوب توابع f و g روی بازه $[-\pi, \pi]$.

(ب) فرض کنید $S: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ یک نگاشت خطی باشد، به طوری که برای هر $n_0 \in \mathbb{Z}$ داشته باشیم:

$$S(f(n - n_0)) = (S(f))(n - n_0)$$

در این صورت تحقیق کنید،

$$(S(f))(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)h(n - k)$$

که در آن $h(n) = (S(\delta))(n)$.

(ج) اگر برای $f, g \in \mathcal{F}$ تعریف کنیم،

$$(f * g)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)g(n - k)$$

تحقیق کنید $f * g = g * f$.

(د) درستی قسمت (ب) را برای عملگر

$$(S(f))(n) = \frac{1}{3} (f(n - 2) + f(n - 1) + f(n))$$

بررسی کنید.

(ه) فرض کنید $\bar{\mathcal{F}}$ مجموعه تمام توابع حقیقی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ باشد و تعریف کنید،

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تمرین سری سوم

تحقیق کنید که برای Δ های کوچک

$$\hat{f}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

تقریبی از f است و نتیجه بگیرید که اگر حد زیر به معنی خوبی وجود داشته باشد، داریم

$$f(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

که در آن $\delta(t)$ دلتای دیراک است.

(و) اگر تعریف کنیم

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

تحقیق کنید $f * g = g * f$.

(ز) اگر $\bar{S} : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$ نگاشتی خطی باشد که با ترکیب های خطی نامتناهی و حدگیری جابه جا شود و به علاوه برای هر t_0 داشته باشیم $S(f(t - t_0)) = (S(f))(t - t_0)$ تحقیق کنید

$$S(f) = f * h$$

که در آن $h = S(\delta)$.

(ح) اگر $S(f) = y$ جواب معادله دیفرانسیل

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

با شرایط اولیه $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ باشد که در آن $a_i \in \mathbb{R}$ اعداد حقیقی ثابت هستند، تحقیق کنید که S شرایط بخش (ز) را دارد.

تمرین ۳

تبدیل فوریه توابع زیر را بیابید.

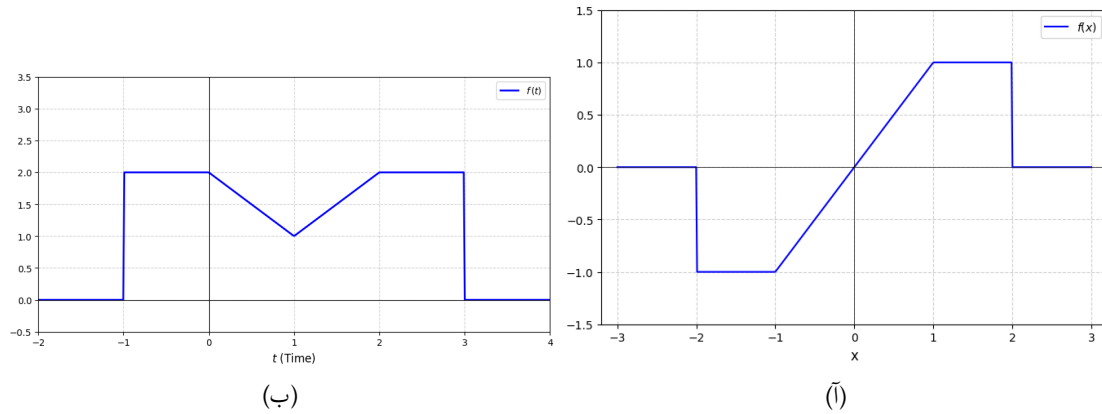
$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & -1 < x < 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (\bar{A})$$

(ب) تابع $f(x)$ با ضابطه نشان داده شده در شکل ۲ ($\bar{A}$).

تمرین ۴

فرض کنید $\mathcal{F}(\omega)$ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ که ضابطه آن در شکل ۲ (ب) نشان داده شده است، باشد. بدون محاسبه صریح $\mathcal{F}(\omega)$ و با استفاده از روابط بین $f(x)$ و $\mathcal{F}(\omega)$ به سوال های زیر پاسخ دهید.

تمرین سری سوم



شکل ۲

(آ) مقدار $\mathcal{F}(0)$ را بدست آورید.

(ب) انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) d\omega$ را بدست آورید.

(ج) انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) \frac{\sin(\omega)}{\omega} e^{i\omega} d\omega$ را محاسبه کنید.

(د) انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2 d\omega$ را محاسبه کنید.

تمرین ۵

معادله $y''(x) - 4y(x) = \delta(x)$ را در نظر بگیرید.

(آ) اگر شرایط اولیه به صورت $y(0) = 0, y'(0) = 0$ باشند، معادله را برای $x \geq 0$ به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

یادآوری: تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx.$$

(ب) معادله را با شرایط مرزی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$ روی $\mathbb{R}$ با استفاده از تبدیل فوریه حل کنید،

$$\mathcal{F}[f(x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

(ج) از حل این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟