

تمرین سری دوم

مدرس: دکتر امیر دانشگر

تمرین ۱

سری فوریه توابع متناوب زیر را بدست آورید.

(آ)

$$f(x) = x|x|, \quad -1 \leq x < 1,$$

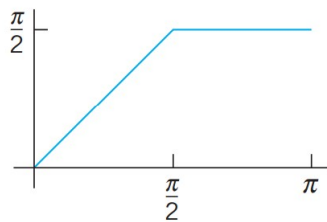
(ب)

$$f(x) = \cos^2 \pi x, \quad -\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{4},$$

(ج)

$$f(x) = e^x, \quad -\pi \leq x < \pi,$$

(د)



تمرین ۲

(آ) با استفاده از سری فوریه‌ی تابع $f(x) = \cos(ax)$ به ازای مقادیر غیر صحیح a در بازه $(0, 2\pi)$ مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ را بدست آورید.

تمرین سری دوم

ب) با استفاده از سری فوریه $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{12}, |x| < \pi$ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ را بیابید.

تمرین ۳

فرض کنید $\delta < \pi$ و f تابعی با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi, \pi]$ با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < -\delta \\ 1 & -\delta \leq x \leq \delta \\ 0 & \delta < x \leq \pi \end{cases}$$

آ) سری فوریه f را بیابید.

ب) از قضیه همگرایی سری های فوریه استفاده کنید و تساوی زیر را نتیجه بگیرید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

ج) از اتحاد پارسوال استفاده کنید و تساوی زیر را نتیجه بگیرید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2 \delta} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

تمرین ۴

آ) فرض کنید f تابعی با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[0, 2\pi]$ با ضابطه $f(x) = x$ تعریف شده است. سری فوریه f را بیابید و با استفاده از اتحاد پارسوال نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^2}{6}$$

ب) فرض کنید f تابعی با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi, \pi]$ با ضابطه $f(x) = (\pi - |x|)^2$ تعریف شده است. سری فوریه f را یافته و با استفاده از اتحاد پارسوال نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

همچنین نتیجه قسمت (الف) را با استفاده از قضیه همگرایی سری های فوریه بازایی کنید.

تمرین سری دوم

(ج) فرض کنید f تابعی متناوب با دوره تناوب 2π باشد که روی بازه $[-\pi, \pi]$ با ضابطه $f(x) = x^2$ تعریف شده است. سری فوریه f را بیابید و با استفاده از اتحاد پارسوال و نتایج قسمت های (الف) و (ب) رابطه زیر را نتیجه بگیرید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

تمرین ۵

با در نظر گرفتن ضرب داخلی به صورت

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

به سوال های زیر پاسخ دهید.

(آ) نشان دهید اگر توابع $y_0, y_1, \dots$ یک پایه متعامد روی بازه $a \leq x \leq b$ باشند، آنگاه برای $c > 0$ توابع $y_0(ct+k), y_1(ct+k), \dots$ یک پایه متعامد روی بازه $\frac{a-k}{c} \leq t \leq \frac{b-k}{c}$ تشکیل می دهند.

(ب) با استفاده از قسمت قبل تعامد

$$1, \cos(\pi x), \sin(\pi x), \cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \dots$$

روی بازه $-1 \leq x \leq 1$ را از تعامد $1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots$ نتیجه بگیرید. $-\pi \leq x \leq \pi$

تمرین ۶

با در نظر گرفتن معادله اشتروم-لیوویل به صورت

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} y(x) \right] - q(x) y(x) = \lambda r(x) y(x) \quad (1.0)$$

به سوال های زیر پاسخ دهید.

(آ) نشان دهید معادله $y'' + fy' + (g + \lambda h)y = 0$ را با استفاده از تبدیل های

$$p = \exp\left(\int f dx\right), \quad q(x) = -pg, \quad r = -hp$$

به فرم ۱.۰ تبدیل کرد و دلیل استفاده از این تبدیل ها را بیان کنید.

(ب) با استفاده از بخش قبل مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله

$$y'' - 2y' + (\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

را بدست آورید و متعامد بودن توابع ویژه را بررسی کنید.