

تمرین سری اول

مدرس: دکتر امیر دانشگر

تمرین ۱

ماتریس زیر را در نظر بگیرید،

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(آ) مقادیر ویژه و بردارهای ویژهی متعامد یکه ماتریس A را بیابید.

(ب) نشان دهید که مقادیر ویژه برابرند با،

$$\lambda_k = 2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4} \right), \quad k = 1, 2, 3,$$

و بردارهای ویژه به صورت زیر قابل نمایش هستند،

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin \left(\frac{k\pi}{4} \right), \sin \left(\frac{2k\pi}{4} \right), \sin \left(\frac{3k\pi}{4} \right) \right]^T, \quad k = 1, 2, 3.$$

(ج) اگر ضرب داخلی دو بردار f و g را به صورت $\langle f, g \rangle := \sum_i f(i) g(i)$ ، تعریف کنیم، بردار ستونی $u = (2, 4, 5)^T$ را با استفاده از ضرب داخلی، به صورت ترکیب خطی از بردارهای ویژه بدست آمده در بخش (آ) بنویسید.

(د) اگر تعریف کنیم $U := [v_1, v_2, v_3]$ ، که v_1, v_2, v_3 بردارهای متعامد یکه محاسبه شده در بخش (ب) باشند، نشان دهید $U^{-1} = U^T$ و تحقیق کنید با استفاده از ماتریس U می توان ماتریس A را قطری کرد، یعنی

$$U^T A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

تمرین ۲

فرض کنید $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر ۲ باشد. اگر عملگر مشتق $D: V \rightarrow V$ به صورت

$$D(p(x)) = \frac{dp}{dx}$$

تعریف شود،

(آ) نشان دهید، عملگر مشتق یک عملگر خطی است، یعنی برای $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم،

$$D(\alpha p(x) + \beta q(x)) = \alpha D(p(x)) + \beta D(q(x)).$$

(ب) اگر $B = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$ را به عنوان یک پایه برای V در نظر بگیریم، عملگر مشتق را به صورت ماتریسی در این پایه نمایش دهید.

(ج) نمایش ماتریسی قسمت قبل را برای پایه $B' = \{e'_1 = 1, e'_2 = x, e'_3 = \frac{x^2}{2}\}$ تکرار کنید و نشان دهید در این حالت اگر داشته باشیم $p(x) = a_0e'_1 + a_1e'_2 + a_2e'_3$ آنگاه عملگر مشتق به صورت

$$(a_0, a_1, a_2) \mapsto (a_1, a_2, 0)$$

عمل می‌کند.

(د) چندجمله‌ای $p(x) = (1+x)(4x-3)$ را در پایه‌های B و B' نمایش دهید. آیا برای این کار می‌توان از ضرب داخلی تعریف شده در تمرین قبل استفاده کرد؟

تمرین ۳

فرض کنید برای توابع حقیقی f, g بر روی بازه $[a, b]$ ضرب داخلی به صورت

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad (1.0)$$

تعریف شده باشد. اگر برای عملگر دیفرانسیلی L در اتحاد لاگرانژ^۱

$$\langle f, L[g] \rangle - \langle L[f], g \rangle = [p(x)(f'g - fg')]_a^b$$

داشته باشیم، $[p(x)(f'g - fg')]_a^b = 0$ یعنی $\langle f, L[g] \rangle = \langle L[f], g \rangle$ در این صورت عملگر L نسبت به این ضرب داخلی خودالحاق^۲ است. توجه کنید طبق محتوای درس چنین عملگری دارای مجموعه‌ای از توابع ویژه متعامد یکه است و از این توابع ویژه برای بسط توابع دلخواه می‌توان استفاده کرد.

¹Lagrange identity

²Self-adjoint

تمرین سری اول

(آ) با در نظر گرفتن عملگر دیفرانسیلی $L[y] = -\frac{d^2}{dx^2} y(x)$ اتحاد لاگرانژ را بررسی و مقادیر ویژه و توابع ویژه مربوط به شرایط اولیه زیر را روی بازه $[0, L]$ بدست آورید.

$$(1) \begin{cases} y'' = -\lambda y, \\ y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y'' = -\lambda y, \\ y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0. \end{cases}$$

(ب) نشان دهید در هرکدام از معادلات (۱) و (۲) توابع ویژه بدست آمده در بازه $[0, L]$ با ضرب داخلی (۱۰۰) متعامد هستند.

(ج) تابع $y(x) = x - \frac{1}{4}$ را در بازه $[0, 1]$ در پایه بدست آمده از توابع ویژه معادله دیفرانسیل (۱) و (۲) نمایش دهید. هم چنین بسط تیلور تابع $\sin(x)$ حول $x = \frac{1}{4}$ را بر حسب توابع

$$1, (x - \frac{1}{4}), (x - \frac{1}{4})^2, \dots$$

بنویسید. مقایسه این نمایش ها اهمیت انتخاب پایه مناسب برای بسط دادن یک تابع را نشان می دهد.

(مثال ۱ بخش ۱۱.۵ کتاب را نگاه کنید)

تمرین ۴

برای عدد صحیح $n \geq 0$ ، معادله دیفرانسیل لژاندر^۳ به صورت

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)y'(x)] + n(n+1)y(x) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

تعریف می شود.

(آ) در درس معادلات دیفرانسیل با حل این معادله با استفاده از سری های توانی آشنا شده اید. نشان دهید که چندجمله های درجه n که در رابطه بازگشتی،

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), & n \geq 1 \\ P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \end{cases}$$

صدق می کنند، جواب این معادله ها بوده و با ضرب داخلی (۱۰۰) بر یکدیگر عمود هستند.

(ب) چندجمله ای $p(x) = (1+x)(4x-3)$ را در پایه حاصل با استفاده از ضرب داخلی بدست آورید و نتیجه را با قسمت (د) سوال ۲ مقایسه کنید.

(مثال ۴ بخش ۱۱.۵ کتاب را نگاه کنید)

³Legendre Differential equation