

به نام خدا



آزمون میان‌ترم درس معادلات دیفرانسیل
نیم‌سال اول ۰۴-۰۵
مدت زمان آزمون: ۳ ساعت

دانشکده علوم ریاضی

- این آزمون شامل ۶ سوال است. پاسخ سوالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سوال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان مجاز نیست.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

۱. جواب مسئله مقدار اولیه زیر را بیابید: (۱۰ نمره)

$$\begin{cases} y' = \frac{y \ln y}{1+t}, \\ y(0) = e. \end{cases}$$

۲. مقدار y را طوری بیابید که جواب مسئله مقدار اولیه زیر وقتی $t \rightarrow \infty$ کراندار باقی بماند: (۱۰ نمره)

$$\begin{cases} y' - y = 1 + 3 \sin t, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

۳. عامل انتگرال‌سازی که تابعی است از $t + y$ بیابید و سپس معادله را حل کنید. (۱۰ نمره)

$$(3ty + y^2)dt + (3ty + t^2)dy = 0$$

۴. برای معادله دیفرانسیل $ty'' - y' + 4t^3y = 0$ ، می‌دانیم تابع $y_1 = \sin(t^2)$ یک جواب است. به کمک روش کاهش مرتبه یک جواب دیگر به دست آورید. سپس جواب عمومی معادله مذکور را بیابید. (۱۰ نمره)

۵. برای معادله دیفرانسیل $y'' + 9y = 2t \sin(3t)$ ، یک جواب خصوصی به کمک روش ضرایب نامعین به دست آورید. (۱۰ نمره)

۶. معادله دیفرانسیل $4y'' + 4y' + y = g(t)$ را در نظر بگیرید. اگر بدانیم که $\psi(t) = (\sin(t^2) + t + 2)e^{-\frac{t}{2}}$ یک جواب این معادله است، جوابی از این معادله دیفرانسیل پیدا کنید که در شرایط $y(0) = y'(0) = 1$ صدق کند. (۱۰ نمره)