



۰۴/۹/۱۳
مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۴)
۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۰۵-۰۴

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. لطفاً پاسخ‌ها را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر صفحه تنها به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی پاسخ‌ها، استدلال کامل و واضح ارائه دهید. از به کار بردن عبارات کلی‌ای مانند «واضح است» یا «بدیهی است» خودداری نمایید.
- استفاده از هر نوع ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع می‌باشد.
- در طول زمان امتحان، به هیچ سؤالی پاسخ داده نخواهد شد.

سؤال ۱. فرض کنید z و w دو عدد مختلط باشند که روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $R > 0$ واقع‌اند. نشان دهید $\frac{(z+w)^2}{zw}$ یک عدد حقیقی نامنفی است.

سؤال ۲. فرض کنید (a_n) دنباله‌ای از اعداد حقیقی ناصفر باشد با این ویژگی که $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n}$. نشان دهید دنباله (a_n) همگراست و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید عدد طبیعی N وجود دارد طوری که به ازای هر $n \geq N$ ، $\frac{1}{n} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{3}{4}$. سپس نتیجه بگیرید به ازای همین N که به دست آورده‌اید، وقتی $n \geq N+1$ داریم $(\frac{3}{4})^{n-N} |a_N| < |a_n|$.

سؤال ۳. فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد و $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را تابعی پیوسته در نظر بگیرید با این ویژگی که $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$. نشان دهید اگر $a < k < f(0)$ ، آنگاه عدد حقیقی‌ای مثل $c > 0$ وجود دارد طوری که $f(c) = k$.

راهنمایی: حدی را که در صورت سؤال آمده است در نظر بگیرید و سپس فرض کنید $0 < \epsilon = a - k$.

سؤال ۴. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که منحنی آن از مبدأ مختصات می‌گذرد. نشان دهید عدد حقیقی‌ای مثل $0 < c < \frac{\pi}{4}$ وجود دارد طوری که $f'(c) = f(c) \tan c$.

راهنمایی: $f(x)$ را در $\cos x$ ضرب کنید.

سؤال ۵. فرض کنید a و h دو عدد حقیقی باشند و $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ را تابعی مشتق‌پذیر در نظر بگیرید با این ویژگی که $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = a$. در این صورت، $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+h) - f(x))$ را محاسبه کنید.

سؤال ۶. نشان دهید معادله $\cos(\sin x) = x$ فقط یک جواب حقیقی دارد.

توزیع نمره. هر سؤال ۲۰ نمره دارد.

مجموع: ۱۲۰ نمره