



درس معادلات دیفرانسیل  
نیمسال اول ۰۳-۰۴  
استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری دوازدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. جواب مساله مقدار اولیه زیر را به دست آورید.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۲. همه بردارهای  $X$  را تعیین کنید بطوریکه جواب‌های مساله مقدار اولیه زیر تابعی تناوبی نسبت به متغیر  $t$  باشند.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = X.$$

۳. الف) ماتریس اساسی  $\Phi(t)$  را برای دستگاه زیر طوری بیابید که در شرط  $\Phi(0) = I$  صدق کند.

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X$$

ب) مساله مقدار اولیه

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

را با استفاده از ماتریس اساسی حل کنید.

۴. الف) برای دستگاه معادلات زیر نشان دهید ۲ مقدار ویژه با تکرار ۳ می‌باشد.

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} X$$

ب) نشان دهید دستگاه فوق تنها یک جواب به شکل  $\xi e^{rt}$  دارد که در آن  $r = 2$  می‌باشد.

ج) جواب دیگر را به صورت  $X = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t}$  فرض کنید و معادلات مربوط به این بردارها را از طریق جایگذاری این جواب در دستگاه معادلات به دست آورید.

د) قسمت قبل را برای جواب سوم به شکل  $X = \xi \left(\frac{t}{r}\right) e^{2t} + \eta t e^{2t} + \zeta e^{2t}$  انجام دهید.

ه) فرم جردن ماتریس  $A$  را با استفاده از فرمول  $J = T^{-1}AT$  محاسبه کنید که در آن  $T$  ماتریسی است که ستون‌های آن به ترتیب  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\zeta$  می‌باشند.

۵. الف) نشان دهید  $r = 1$  مقدار ویژه با تکرار ۳ برای دستگاه زیر است و این مقدار ویژه دو بردار ویژه مستقل خطی دارد.

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} X$$

ب) برای به دست آوردن جواب سوم باید مانند سوال قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که باید از ترکیب خطی بردارهای ویژه استفاده کرد. نشان دهید این ترکیب خطی باید در یک تساوی صدق کنید و سپس جواب سوم را به دست آورید.

۶. جواب دستگاه زیر را به دست آورید.

$$X' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{bmatrix}, \quad t > 0$$

۷. ماتریس  $A$  را پیدا کنید اگر

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} \\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$