



درس معادلات دیفرانسیل
نیمسال اول ۱۳۰۴-۰۳
استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری یازدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. الف) نشان دهید اگر $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ ، آنگاه: $\frac{F(s)}{s} = \mathcal{L}(\int_0^t f(\theta)d\theta)$
ب) با استفاده از رابطه به دست آمده لاپلاس وارون $\frac{1}{s(s^2+1)}$ را محاسبه کنید.

۲. الف) فرض کنید عدد ثابتی مانند T داریم که رابطه $f(t+T) = f(t)$ برای تابع f و هر t برقرار است. f را متناوب با دوره تناوب T می‌نامیم. نشان دهید:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

ب) به وسیله قسمت قبل لاپلاس توابع $f(t) = t - [t]$ و $g(t) = |\sin t|$ را محاسبه کنید.

۳. معادله دیفرانسیل زیر را به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید

$$y'' - 3xy' + (1 - x^2)y = \cos(x)$$

۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} X$ را در نظر بگیرید.

الف) با حذف یک متغیر یک معادله مرتبه دوم به دست آورید.

ب) معادله مرتبه دوم قسمت قبل را بصورت دستگاه مرتبه اول بنویسید. این همان سیستم ابتدای سوال نیست اما نشان دهید می‌توان با یک تغییر مختصات به دستگاه اول تبدیل کرد.

۵. ثابت کنید رانسکین دو مجموعه اساسی از جواب‌های دستگاه $X' = P(t)X$ ضربی ثابت از هم هستند.

۶. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید و رفتار جواب را وقتی $t \rightarrow \infty$ تشریح کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} X, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۷. الف) نشان دهید مقادیر ویژه ماتریس A^n برابر توان n ام مقادیر ویژه ماتریس A است.

ب) نشان دهید ماتریس‌های A و AT^{-1} دارای چند جمله‌ای مشخصه یکسان هستند.

۸. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} X$$