

به نام خدا



درس معادلات دیفرانسیل

نیمسال اول ۱۳۰۳-۰۴

استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری دهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. تبدیل لاپلاس توابع داده شده را محاسبه کنید. سعی کنید در این محاسبه به جای استفاده مستقیم از تعریف، تا جای ممکن توابع را بصورت توابع شناخته شده در جدول لاپلاس تبدیل کنید و سپس تبدیل لاپلاس آن‌ها را محاسبه کنید.

(الف)

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t^2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$f(t) = |\sin(t)|, \quad t \geq 0 \quad (\text{ب})$$

۲. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ \cos t, & \pi \leq t < \infty \end{cases}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

۳. لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه کنید:

$$F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2} \quad (\text{الف})$$

$$F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3} \quad (\text{ب})$$

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} \quad (\text{ج})$$

۴. الف) فرض کنید $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ برای $0 < a < s$ ، موجود باشد. درستی رابطه زیر را نشان دهید:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\} = \frac{1}{a} e^{-\frac{bt}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

(ب) با استفاده از قسمت قبل لاپلاس وارون توابع زیر را محاسبه کنید:

$$F(s) = \frac{2s+1}{4s^2+4s+5}, \quad F(s) = \frac{e^2 e^{-4s}}{2s-1}.$$

۵. الف) فرض کنید $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. نشان دهید:

$$f(t) = \frac{-1}{t} \mathcal{L}\{F'(s)\}$$

در نتیجه اگر لاپلاس وارون $F'(s)$ را بدانیم در واقع می‌توانیم لاپلاس وارون $F(s)$ را محاسبه کنیم.

ب) لاپلاس وارون توابع زیر را با استفاده از قسمت قبل محاسبه کنید.

$$\ln\left(\frac{s+a}{s-a}\right) \quad (۱)$$

$$\arctan\left(\frac{a}{s}\right) \quad (۲)$$

۶. با استفاده از تبدیل لاپلاس و استفاده از رابطه $e^{\ln u} = u$ مقدار k را در معادله زیر بیابید.

$$\int_0^{\infty} t^2 k^{-t} \sin t dt = 0$$

۷. جواب مساله مقدار اولیه زیر را به صورت انتگرال پیچش به دست آورید:

$$y'' + 4y' + 4y = g(t), \quad y(0) = 2, y'(0) = -3$$

۸. جواب مساله‌های مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$y'' + 2y' + 3y = \sin(t) + \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \text{الف)}$$

$$y'' + y = \delta(t - 2\pi) \cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \text{ب)}$$

۹. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y^{(3)} + y - 1 = \int_0^t \sin(t-x)y(x) dx, \quad t > 0$$

$$y(0) = y''(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$