

به نام خدا



درس معادلات دیفرانسیل  
نیمسال اول ۱۳۰۴-۰۳  
استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری هشتم

دانشکده علوم ریاضی

۱. جواب مساله مقدار اولیه

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

را روی بازه  $0 < t < \infty$  به دست آورید.

۲. در هر قسمت تکین عادی بودن نقطه داده شده برای معادله دیفرانسیل را بررسی کنید.

(الف)

$$t(t-2)^2 y'' + ty' + y = 0, \quad t = 0 \quad \text{و} \quad t = 2$$

(ب)

$$(\sin t)y'' + (\cos t)y' + \frac{1}{t}y = 0, \quad t = 0$$

(ج)

$$(e^t - 1)y'' + e^t y' + y = 0, \quad t = 0$$

۳. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$2t^2 y'' - ty' + (1+t)y = 0.$$

۴. دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید. اختلاف ریشه‌های معادله مشخصه با هم یک عدد مثبت است با این وجود دو جواب به صورت  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  وجود دارد.

$$t^2 y'' + (3t - t^2)y' - ty = 0.$$

۵. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$t^2 y'' + (t^2 - 3t)y' + 3y = 0.$$

(الف) نشان دهید  $r = 1$  و  $r = 3$  ریشه‌های معادله مشخصه است.

(ب) جوابی به صورت سری توانی

$$y_1(t) = t^3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad a_0 = 1$$

برای معادله بیابید.

(ج) نشان دهید  $y_1(t) = t^3 e^{-t}$ .

(د) نشان دهید معادله جوابی به شکل  $\sum_{t=0}^{\infty} a_n t^n$  ندارد.

(ه) با استفاده از کاهش مرتبه جواب دیگری از معادله پیدا کنید. پیدا کردن جواب در فرم انتگرالی کفایت می‌کند.

۶. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$ty'' + ty' + 2y = 0.$$

(الف) نشان دهید  $r = 0$  و  $r = 1$  ریشه‌های معادله مشخصه است.

(ب) جوابی به فرم زیر برای معادله بیابید.

$$y_1(t) = t \sum_{t=0}^{\infty} a_n t^n$$

(ج) جواب دیگر را با استفاده از کاهش مرتبه پیدا کنید.