



درس معادلات دیفرانسیل  
نیمسال اول ۱۳۰۳-۰۴  
استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری ششم

دانشکده علوم ریاضی

۱. مساله مقدار اولیه

$$16y'' + 24y' + 9y = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 1$$

را در نظر بگیرید.

الف) مساله را حل کنید.

ب) مقدار بحرانی  $a$  را بیابید، که جواب‌هایی را که منفی می‌شوند از جواب‌های همواره مثبت جدا می‌کند.

۲. این مساله رفتار حدی جواب‌های معادله  $ay'' + by' + cy = 0$  هنگامی که  $t \rightarrow \infty$  را بررسی می‌کند.

الف) اگر  $a, b, c$  ثابت‌های مثبت باشند. آنگاه همه‌ی جواب‌ها در  $t \rightarrow \infty$  به صفر میل می‌کنند.

ب) اگر  $a, c > 0$  اما  $b = 0$  رفتار جواب در  $t \rightarrow \infty$  چگونه است؟

ج) اگر  $a, b > 0$  اما داشته باشیم  $c = 0$  آنگاه در  $t \rightarrow \infty$  جواب‌ها به مقدار ثابتی میل می‌کنند که وابسته به شرایط اولیه است. این ثابت را برای یک شرط اولیه دلخواه به دست آورید.

۳. در مساله مقدار اولیه زیر ابتدا جواب معادله همگن و سپس جواب معادله ناهمگن را با استفاده از روش ضرائب نامعین به دست آورید.

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} \cos 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

۴. ابتدا نشان دهید که  $y_1(t) = t$  و  $y_2(t) = te^t$  جواب‌های همگن معادله زیر هستند. سپس یک جواب خاص این معادله را بیابید.

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 3t^3, \quad t > 0$$

۵. سه جواب معادله خطی مرتبه دوم  $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$  به صورت زیر می‌باشند.

$$\psi_1(t) = 3e^t + e^{t^2}, \quad \psi_2(t) = 7e^t + e^{t^2}, \quad \psi_3(t) = 5e^t + e^{-t^2} + e^{t^2}.$$

جواب مساله مقدار اولیه زیر را بیابید:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

۶. فرض کنید یکی از جواب‌های معادله  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  تابع  $(1+t^2)$  باشد و رونسکین هر دو جواب معادله ثابت باشد. جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 1 + t$$

۷. الف) نشان دهید  $t^r$  یک جواب معادله اویلر  $t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0$  است به شرطی که  $r$  ریشه معادله مشخصه  $r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$  باشد.

ب) فرض کنید  $\beta = 4(\alpha - 1)^2$ . با استفاده از کاهش مرتبه نشان دهید جواب دیگر معادله اویلر به شکل  $(\ln t)t^{\frac{1-\alpha}{2}}$  است.

ج) جواب عمومی معادله زیر را به دست آورید.

$$t^2 y'' + 3t y' + y = 0$$

۸. جواب معادله دیفرانسیل  $y'' + \frac{1}{4t^2}y = 0$  که در آن  $t > 0$  و  $y_1 = \sqrt{t}$  یک جواب معادله همگن است را بیابید.

۹. جواب معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y'' - \frac{2t}{1+t^2}y' + \frac{2}{1+t^2}y = 1 + t^2$$