



درس معادلات دیفرانسیل
نیمسال اول ۱۳۰۴-۰۳
استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری پنجم

دانشکده علوم ریاضی

۱. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید. سپس α را طوری تعیین کنید که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، جواب به صفر میل کند.

$$y'(\infty) = 2, \quad y(\infty) = \alpha, \quad y'' - y' - 2y = 0$$

۲. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگنی پیدا کنید که $y_1 = t^2$ و $y_2 = t^4$ جواب‌های آن باشند. بیشترین بازه‌ای که این دو تابع جواب معادله دیفرانسیل هستند را پیدا کنید.

۳. الف) نشان دهید $y_1 = t$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است سپس جواب دیگر را به دست آورید.

$$t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0, \quad t > 0$$

ب) جوابی از معادله دیفرانسیل قسمت قبل به دست آورید که در لحظه $t = 1$ رونسکین آن برابر ماتریس همانی باشد.

۴. مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$t^2 y'' - ty' - 2y = 0, \quad t > 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

۵. در هر قسمت در مورد درستی گزاره داده شده بحث کنید.

الف) اگر y_1 و y_2 دو تابع مشتق پذیر باشند که برای هر $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ آنگاه معادله خطی مرتبه دوم وجود دارد که دو تابع فوق جواب‌های اساسی آن باشند.

ب) اگر y_1 و y_2 بر روی اعداد حقیقی مستقل خطی باشند. آنگاه حداقل یک $t \in \mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه رابطه $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ برقرار است.

ج) اگر $W(y_1, y_2)$ در یک نقطه مانند t_0 مخالف صفر باشد. آنگاه این دو تابع مستقل خطی هستند.

۶. مساله مقدار اولیه

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha \geq 0$$

را در نظر بگیرید.

الف) جواب مساله را بیابید.

ب) α را طوری بیابید که داشته باشیم $y(1) = 0$

- (ج) کوچک ترین مقدار مثبت t را بر حسب α بیابید که به ازای آن جواب صفر شود.
- (د) حد عبارت پیدا شده در قسمت قبل را وقتی $\alpha \rightarrow \infty$ به دست آورید.