به نام خدا

درس معادلات دیفرانسیل
نیمسال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری چهارم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. الف) ثابت کنید $\phi(t) = e^{۲t}$ جواب معادله $y' - ۲y = ۰$ است و به ازای هر مقدار ثابت c، $y = c\phi(t)$ هم جواب این معادله است.

ب) ثابت کنید به ازای $t > ۰$، $\phi(t) = \frac{۱}{t}$ جواب معادله $y' + y^۲ = ۰$ است. اما $y = c\phi(t)$ جواب این معادله نیست، مگر $c = ۰$ یا $c = ۱$.

ج) با توجه به دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای در مورد تفاوت دو معادله می‌گیرید؟

۲. به فرض $L[y](t) = y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t)$، همچنین داشته باشیم $L[t^۲] = t + ۱$ و $L[t] = ۲t + ۲$. نشان دهید $y(t) = t - ۲t^۲$ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + py' + qy = ۰$ است.

۳. الف) به فرض تابع‌های $y_۱$ و $y_۲$ مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = ۰$ را تشکیل بدهند که در آن p و q توابعی پیوسته هستند. ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی $y_۱$ ، یک و تنها یک ریشه از $y_۲$ وجود دارد.

ب) آیا معادله دیفرانسیل خطی و همگن از مرتبه دو وجود دارد که e^t و $۱ - t^۲$ جواب‌های آن باشند؟ اگر جواب مثبت است این مطلب چگونه با قسمت قبل در تناقض نمی‌باشد؟

۴. آیا $y = \sin t^۲$ می‌تواند جواب معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = ۰$ با ضرایب پیوسته در بازه‌ای شامل $t = ۰$ باشد؟

۵. الف) اگر $W(f, g)(t) = ۲e^{۶t}$ باشد که در آن $f = e^{۳t}$ است. تابع g را محاسبه کنید.

ب) اگر $y_۱$ و $y_۲$ مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله دیفرانسیل $ty'' + ۲y' + te^t y = ۰$ را تشکیل بدهند و اگر $W(y_۱, y_۲)(۱) = ۳$ آنگاه مقدار $W(y_۱, y_۲)(۵)$ را بیابید.

۶. فرض کنید $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$ جواب معادله دیفرانسیل $y'' + py' + qy = ۰$ برای $-\infty < t < \infty$ است. اگر $y_۲(۰) = ۱$، $y'_۱(۰) = ۱$، $y_۱(۰) = ۳$ و $y'_۲(۰) = \frac{۱}{۳}$. آنگاه نشان دهید $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$ بر بازه $-\infty < t < \infty$ وابسته خطی هستند.

۷. فرض کنید که $p(t)$ و $q(t)$ توابعی پیوسته روی بازه I باشند و $y_۱(t)$ و $y_۲(t)$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $y'' + p(t)y' + q(t)y = ۰$ روی این بازه هستند.

الف) ثابت کنید اگر $y_۱$ و $y_۲$ نقطه ماکزیمم و یا مینیمم مشترک در نقطه‌ای از I داشته باشند. آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها را تشکیل دهند.

ب) ثابت کنید اگر y_1 و y_2 نقطه عطف مشترک در $t_0 \in I$ داشته باشند آنگاه نمی‌توانند مجموعه‌ای اساسی از جواب‌ها در آن بازه باشند مگر اینکه p و q هر دو در t_0 صفر باشند.