



درس معادلات دیفرانسیل
نیمسال اول ۱۳۰۴-۰۳
استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری سوم

دانشکده علوم ریاضی

۱. معادله دیفرانسیل $f(t) \frac{dy}{dt} + t^2 + y = 0$ دارای عامل انتگرال سازی به شکل $\mu(t) = t$ است. همه توابع $f(t)$ ممکن را پیدا کنید.

۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y - ty^2}{t + t^2y} \quad t > 0$$

۳. فرض کنید معادله دیفرانسیل $(t > 0)$ ، $M + N \frac{dy}{dt} = 0$ همگن باشد. نشان دهید $\mu(t, y) = \frac{1}{tM + yN}$ عامل انتگرال سازی برای این معادله است و با استفاده از آن معادله $\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}$ را حل کنید. (اگر $f(t, y)$ یک تابع همگن از درجه n باشد آن‌گاه: $t \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + y \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} = n f(t, y)$)

۴. عامل انتگرال سازی به فرم $\mu(ty^3)$ برای معادله دیفرانسیل زیر بیابید و سپس آن را حل کنید.

$$t^2y^3 + t(1 + y^2) \frac{dy}{dt} = 0$$

۵. ابتدا بیان کنید چرا معادله با شرط اولیه زیر در شرایط قضیه وجود و یگانگی صدق نمی‌کند سپس همگی جواب‌های ممکن را برای آن به دست آورید. ($c > 0$)

$$y' = -t\sqrt{c^2 - y^2}, \quad y(0) = c$$

۶. مطلوبست در هر قسمت جواب معادله دیفرانسیل را به دست آورید.

الف) $\frac{dy}{dt} = \frac{\sin y}{y^2 - t \cos y}$

ب) $y'' + 2t(y')^2 = 0$

۷. معادله دیفرانسیل $e^t \sec y - \tan y + \left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$ عامل انتگرال سازی به شکل $e^{-at} \cos y$ برای a ثابت دارد. ابتدا مقدار a را محاسبه کنید و پس از آن جواب معادله دیفرانسیل را بیابید.