



درس معادلات دیفرانسیل  
نیمسال اول ۳-۰۴  
استاد: دکتر پورنکی، دکتر فنایی

تمرین سری دوم

دانشکده علوم ریاضی

۱. الف) نشان دهید معادله‌ی

$$(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2 \cos x)dy = 0$$

کامل است، سپس آن را حل کنید.

ب) ابتدا نشان دهید معادله‌ی

$$ydx + (2x - ye^y)dy = 0$$

کامل نیست، اما با ضرب در عامل انتگرال‌ساز  $\mu(x, y) = y$  معادله را کامل کرده و آن را حل کنید.

۲. مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  را بیابید به نحوی که  $\mu = t^\alpha y^\beta$  عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل زیر باشد. سپس جواب معادله را به دست آورید.

$$y(4t + 3y^3) + t(2t + 5y^3) \frac{dy}{dt} = 0$$

۳. ثابت کنید اگر  $\frac{(N_t - M_y)}{(tM - yN)} = R$ ، که در آن  $R$  تنها به  $ty$  بستگی دارد، معادله‌ی دیفرانسیل  $M + Ny' = 0$  عامل انتگرال‌سازی به صورت  $\mu(ty)$  دارد. یک فرمول کلی برای این عامل انتگرال‌ساز بیابید.

۴. تمام توابع  $f(t)$  را پیدا کنید بطوریکه معادله دیفرانسیل  $y^2 \sin t + yf(t) \frac{dy}{dt} = 0$  کامل باشد. سپس معادله را برای هر کدام از این توابع حل کنید.

۵. جواب معادلات دیفرانسیل در هر قسمت را به دست آورید

الف)  $e^t + (e^t \cot y + 2y \csc y) \frac{dy}{dt} = 0$

ب)  $3ty \frac{dy}{dt} = 3y^2 - t^2$

ج)  $(3ty + y^2) + (t^2 + ty) \frac{dy}{dt} = 0$

د)  $\frac{dy}{dt} = \frac{2t+y+4}{t-y-7}$

ه)  $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{4} \cos t + \frac{\sin 2t}{y}$

۶. مساله مقدار اولیهی

$$y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}, \quad y(0) = 1$$

را حل کنید و مشخص کنید جواب در چه بازه‌ای معتبر است؟

۷. نشان دهید هر جواب معادله

تحقیق کنید که  $y_1(t) = 1 - t$  و  $y_2(t) = \frac{-t^2}{4}$ ، هر دو جواب‌های مساله مقدار اولیهی

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad y(2) = -1$$

هستند. هر کدام از این جواب‌ها در چه بازه‌ای معتبر هستند؟

۲. توضیح دهید چرا وجود دو جواب برای مساله‌ی داده شده، یکتایی جواب در قضیه وجود و یگانگی را نقض نمی‌کند.

۸. وجود و یکتایی جواب‌های مساله‌ی مقدار اولیهی

$$y'(t) = (y(t))^{\frac{4}{5}}, \quad y(0) = 0$$

را بررسی کنید.