به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

تمرینهای سری چهاردهم درس ریاضی عمومی دو نیمسال تحصیلی ۱۴۰۳۱

---

۱. فرض کنید خطوط میدان یا همان خمهای انتگرال میدان برداری F با مشتقات جزیی پیوسته، خطوط مستقیم و موازی هم هستند. در مورد خود میدان F و دو کمیت $\mathrm{div}F$ و $\mathrm{curl}F$ چه میتوان گفت؟

۲. فرض کنید که $X=(x,y,z)$ و $X_0 \in \mathbb{R}^3$ یک بردار ثابت و داده شده باشد. درستی برابرهای زیر را نشان دهید.

$$\nabla(X_0.X)=X_0 \quad \nabla\times(X_0\times X)=2X_0 \quad \nabla.(X_0\times X)=0$$

۳. فرض کنید که $X=(x,y,z)$ و $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ یک میدان برداری با مشتقات جزیی پیوسته باشد. نشان دهید برابری زیر درست است.

$$\nabla\times(F\times X)=F-(\nabla.F)X+\nabla(F.X)-X\times(\nabla\times F)$$

۴. برای میدان برداری $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ با مشتقات جزیی پیوسته و $X=(x,y,z)$ با شرط $\mathrm{div}F=0$، قرار دهید

$$G(X)=\int_0^1 tF(tX)\times X\,dt.$$

نشان دهید $\nabla\times G=F$.

۵. برای میدان برداری $G:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ منظورمان از $\iiint_U G\,dV$ و $\iint_S G\,dS$ برداری است که مولفه های آن به ترتیب انتگرالگیری از هر مولفه از میدان برداری G روی U و S است. با این تعریف و برای ناحیه U با مرز ∂U، مانند آنچه در قضیه گاوس (دیورژانس) مفروض است، نشان دهید

$$\iiint_U \nabla\times F\,dV=-\iint_{\partial U} F\times N\,dS$$

که در آن N بردار عمود و برون سوی ∂U است.

راهنمایی: طرفین برابری را در بردار ثابت و دلخواه c ضرب کنید. سپس درستی برابری زیر را تحقیق کنید و در گام بعد از قضیه گاوس استفاده کنید.

$$\nabla.(F\times c)=(\nabla\times F).c-F.(\nabla\times c)=(\nabla\times F).c$$

۶. شار میدان برداری $F = (x^۲ + y^۲, y^۲ - z^۲, z)$ خارج از کره به مرکز مبدا و با شعاع a را محاسبه کنید.

۷. قرار میدهیم

$$D = \{(x, y, z) \mid x^۲ + y^۲ + z^۲ \leq ۴a^۲ \ , \ x^۲ + y^۲ \geq a^۲\}$$

مرز D را با $S_۰$ نشان میدهیم. بخشی از $S_۰$ که روی استوانه قرار دارد را با $S_۱$ و مابقی را با $S_۲$ می نامیم. شار میدان برداری $F(x, y, z) = (x + yz, y - xz, z - e^x \sin y)$ خارج از D و مارّ بر S_i را محاسبه کنید.

۸. اگر $D \subset \mathbb{R}^۳$ یک ناحیه و S مرز این ناحیه، هر دو مانند آنچه در قضیه گاوس است باشند، برای F و ϕ به ترتیب یک میدان برداری و میدان اسکالر، هر دو با مشتقات جزیی پیوسته روی ناحیه D، درستی برابری دیل را نشان دهید.

$$\iiint_D \phi \, \mathrm{div} F \, dV + \iiint_D \nabla\phi . F \, dV = \iiint_S \phi \, F . dS$$

۹. روی ناحیه D با مرز S صادق در شرایط قضیه گاوس، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی ذیل را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} \nabla^۲\phi(x, y, z) = f(x, y, z) & (x, y, z) \in D \\ \phi(x, y, z) = g(x, y, z) & (x, y, z) \in S \end{cases}$$

که در آن $\nabla^۲\phi = \left(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}\right)\phi$.

الف) همه جوابهای معادله مذکور را با شرط $f = ۰ \ , \ g = ۰$ به دست آورید.

ب) برای توابع $f \ , \ g$ با مشتقات جزیی پیوسته، نشان دهید معادله یاد شده بالا، نمی تواند دو جواب متفاوت داشته باشد. راهنمایی: فرض کنید $\phi_۱$ و $\phi_۲$ دو جواب معادله باشد. نشان دهید که $\phi = \phi_۱ - \phi_۲$ جوابی از معادله در قسمت الف است.

ج) مشابه قسمت الف و ب را بجای ناحیه در $\mathbb{R}^۳$ در $\mathbb{R}^۲$ صورت بندی و ثابت کنید.

۱۰. روی ناحیه $D \subset \mathbb{R}^۳$ با مرز S صادق در شرایط قضیه گاوس، با بردار عمود برون سو N بر S، عبارت $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi . N$ را تعریف میکنیم. نشان دهید

$$\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS = \iiint_D \nabla^۲\phi \, dV$$
$$\iint_S \phi\frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS = \iiint_D \phi\nabla^۲\psi - \psi\nabla^۲\phi \, dV$$

برابری دومی را اتحاد گرین نامند.

۱۱. فرض کنید خم C مرز رویه جهتدار S است و جهت روی خم C، جهت القا شده از رویه S باشد، درستی برابریهای ذیل را برای میدان اسکالر ϕ و ψ نشان دهید.

$$\int_C \phi\nabla\psi . d\gamma = -\int_C \psi\nabla\phi . d\gamma = \iint_S (\nabla\phi \times \nabla\psi) . dS$$

۱۲. یک میدان برداری $(u(x,\circ,z),\circ,w(x,\circ,z))$ با مشتقات جزیی پیوسته را روی $\{(x,\circ,z)\mid x,z\in\mathbb{R}\ ,\ x>\circ\}$ درنظربگیرید و سپس آن را حول محور z ها دوران دهید و آن را با $F(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$ نشان دهید. توجه کنید که F روی $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid(x,y)\neq\circ\}$ تعریف شده است. در گام بعدی پیچش آن یا همان $\operatorname{curl}F=\nabla\times F$ را محاسبه کنید.

۱۳. الف) چنبره $\left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1$ را درنظر بگیرید. میدانی برداری حول چنبره مذکور مانند F پیدا کنید که در هر نقطه روی چنبره ناصفر و عمود بر چنبره بوده و $\nabla\times F=\operatorname{Curl}(F)$ نیز در هر نقطه روی چنبره ناصفر و مماس بر چنبره باشد. راهنمایی: از تمرین ۱۲ کمک بگیرید.

ب) میدان برداری دیگری حول این چنبره مانند G را بیابید که در هر نقطه روی چنبره، بر آن مماس باشد و $\nabla\times G$ بر چنبره عمود بوده و همه جا صفر نباشد، یعنی $\nabla\times G$ مجاز است که در نقاطی بر چنبره صفر باشد، ولی نه تمام چنبره. راهنمایی: از تمرین ۱۲ کمک بگیرید.

۱۴. همه توابع با خاصیت زیر را بیابید.

$$f:\mathbb{R}^3-\{(\circ,\circ,\circ)\}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x,y,z)=g(r)\ ,\ r^2=x^2+y^2+z^2$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f=\circ$$

۱۵. تابع $\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ را بر دامنه $\mathbb{R}^3-\{(\circ,\circ,\circ)\}$ درنظر بگیرید. برای مکعب

$$Q:=\{(x,y,z)\mid |x|+|y|+|z|=a\}\quad,\quad a>\circ$$

اگر N بردار نرمال یکه برون سو بر این مکعب باشد، مطلوبست محاسبه

$$\int_Q\nabla\left(\frac{1}{r}\right).NdS.$$

راهنمایی: قضیه گاوس (دیورژانس) را برای ناحیه مناسب بکار ببرید. تقارن کروی تابع $\frac{1}{r}$ می‌تواند ناحیه مناسبی را پیشنهاد دهد.

۱۶. برای هر تابع با مشتقات جزیی پیوسته $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ بطوریکه

$$\lim_{r\to+\infty}\max_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r}|\phi(x,y,z)|=\circ\quad,\quad\lim_{r\to+\infty}r^2\max_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r}|\nabla\phi(x,y,z)|=\circ$$

نشان دهید که برابری پایین را داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\nabla\phi.\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dxdydz=4\pi\phi(\circ).$$

توجه: منظور از $\nabla\phi(x,y,z)$، $\nabla\phi$ در نقطه (x,y,z) است.

راهنمایی: برای $\circ<\epsilon<R$، قرار دهید $D_{R,\epsilon}:=\{(x,y,z)\mid\epsilon\leq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq R\}$ و با استفاده از برابری

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\nabla\phi.\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dxdydz=\lim_{\epsilon\to\circ}\lim_{R\to\infty}\iiint_{D_{R,\epsilon}}\nabla\phi.\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dxdydz$$

در محاسبه قسمت سمت راست، قضیه دیورژانس را برای میدان برداری $\phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ بکار ببرید.

۱۷. تمام صفحه های $ax+by+cz=d$ را پیدا کنید که وقتی کره به شعاع یک به مرکز مبدا را قطع کردند، مساحت ناحیه روی صفحه و داخل کره برای آنها، در مقایسه با دیگر صفحات، بیشترین باشد.

۱۸. تمام صفحه های $ax+by+cz=d$ را پیدا کنید که وقتی بیضی گون $\frac{x^۲}{\alpha^۲}+\frac{y^۲}{\beta^۲}+\frac{z^۲}{\eta^۲}=۱$ را قطع کردند، مساحت ناحیه روی صفحه و داخل بیضون گون برای آنها، در مقایسه با دیگر صفحات، بیشترین باشد.

۱۹. نگاشت هموار (با مشتقات جزیی پیوسته) و یک به یک $F(s,t,r)=(x(s,t,r),y(s,t,r),z(s,t,r))$ را در نظر بگیرید که $\frac{\partial F}{\partial r}.\frac{\partial F}{\partial t}=۰$ و $\frac{\partial F}{\partial r}.\frac{\partial F}{\partial s}=۰$ و $|\frac{\partial F}{\partial r}|=۱$. نشان دهید که سطح ناحیه با پرمایش $F(s,t,r_۰)$ برای $(s,t)\in A\subset\mathbb{R}^۲$ برابر است با مشتق حجم ناحیه با پرمایش $F(s,t,r)$ برای $(s,t,r)\in A\times[r_۰,r_۰+\epsilon]$ نسبت به r در $r=r_۰$.

۲۰. برای $۰<b<a$ ابتدا حجم درون چنبره $\left(\sqrt{x^۲+y^۲}-a\right)^۲+z^۲=b^۲$ یعنی حجم ناحیه صادق در نامعادله

$$\left(\sqrt{x^۲+y^۲}-a\right)^۲+z^۲\leq b^۲$$

را به دست آورید. سپس با استفاده از تمرین ۱۹ سطح چنبره را برحسب a,b محاسبه کنید.

ب) قسمت الف را برای کره به شعاع r حل کنید.

۲۱. برای تابع $f:[a,b]\subseteq\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ با مشتق پیوسته در صفحه xz، مطلوبست محاسبه حجم و سطح ناشی از دوران این تابع حول محور z.

۲۲. تمرین ۱۹ را برای ارتباط بین سطح و طول صورت بندی کرده و درستی آن را نشان دهید.

۲۳. نشان دهید که برای A و C مناسب، نگاشت

$$\begin{cases}\Phi:[۰,۲\pi]\times[۰,A]\to\mathbb{R}^۲\\ \Phi(t,s)=(C\cos t\cosh s,C\sin t\sinh s)\end{cases}$$

مستطیل $[۰,۲\pi]\times[۰,A]$ را به تمام داخل بیضی

$$E_{a,b}:=\left\{(x,y)\;\middle|\;\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱\right\}.$$

می‌نگارد و نشان دهید برای $(t,s)\in(۰,۲\pi)\times(۰,A)$ این نگاشت یک به یک است. درگام بعدی، ژاکوبین و دترمینان ژاکوبین این نگاشت را محاسبه کنید و تغییر متغیر Φ را برای محاسبه انتگرال

$$\iint_{E_{a,b}}dxdy$$

بکار ببرید که مقدار آن همان مساحت بیضی $E_{a,b}$ است. البته می‌دانیم که می‌توان مساحت بیضی را از روشهای مقدماتی تر نیز بدست آورد.

۲۴. انتگرالی برای محاسبه محیط بیضی بدست آورید (تلاش نکنید آن انتگرال را بگیرید، زیرا که این انتگرال برحسب توابعی که می‌شناسید قابل بیان نیست) و نشان دهید که این انتگرال از مشتق گیری از حجم بدست آمده در تمرین ۲۲ بدست نمی‌آید. چرا این اتفاق خوب در اینجا رخ نمی‌دهد؟ توضیح دهید.

۲۵. رویه با پرمایش $\left((1-t\sin\alpha)\cos 2\alpha, (1-t\sin\alpha)\sin 2\alpha, t\cos\alpha\right)$ برای $(t,\alpha) \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times (0,\pi)$ را توصیف کنید. نشان دهید که قضیه استوکس برای میدان برداری $\left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0\right)$ و این رویه برقرار نیست. چرا؟ توضیح دهید.

تمرینهای مشکلتر

۱. گوی $B := B_{(0,0,0)}(1)$ و تابع $\Phi(t)(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ را درنظر بگیرید که نسبت به هر چهار متغیر ورودی دارای مشتقات جزیی پیوسته است. اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$ نگاشت $\Phi(t) : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ یک به یک باشد، برای تابع هموار (دارای مشتقات جزیی پیوسته) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$، درستی تساوی پایین را نشان دهید.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Phi(t)(B)} f(x,y,z,t)dV = \int_{\Phi(t)(B)} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}\left(f\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)dV = \int_{\Phi(t)(B)} \frac{\partial f}{\partial t} + \int_{\partial(\Phi(t)(B))} f\frac{\partial \Phi}{\partial t}.dS$$

که در آن $\Phi(t)(B) := \{\Phi(t)(x,y,z) \mid (x,y,z) \in B\}$ و $\partial\left(\Phi(t)(B)\right)$ مرز ناحیه $\Phi(t)(B)$ است.

۲. با استفاده از راهنمایی پایین نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\forall\, X,Y,Z \in \mathbb{R}^n \quad |X+Y|+|X+Z|+|Y+Z| \leq |X|+|Y|+|Z|+|X+Y+Z|$$

این نامساوی به نامساوی هلاوکا شهرت دارد.

راهنمایی: میتوانید این نامساوی را برای $n=3$ ثابت کنید ولی راه حل ذیل برای هر $n \in \mathbb{N}$ صادق است.

بنا به تعریف $\mathbb{S}^{n-1} = \{Y \in \mathbb{R}^n \mid |Y| = 1\}$. برای هر بردار $X \in \mathbb{R}^n$ تعریف کنید

$$E(X) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |X.W|dS.$$

نشان دهید برای هر ماتریس مربعی با ضرایب ثابت $A_{n\times n}$ که $AA^t = I$ داریم $E(AX) = E(X)$. برای ماتریس های تجانس $B = bI_n$ نیز نشان دهید که $E(BX) = E(bX) = |b|E(X)$. نتیجه بگیرید که برای یک تابع $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ باید $E(X) = f(|X|)$. با مطالعه ویژگیهای f نشان دهید که اگر قرار دهیم $\lambda := E(e_1)$ آنگاه $E(X) = \lambda|X|$. اکنون نامساوی هلاوکا را برای $n=1$ یعنی بر $\mathbb{R}$ ثابت کنید. یعنی نشان دهید

$$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R} \quad |x+y|+|x+z|+|y+z| \leq |x|+|y|+|z|+|x+y+z|.$$

درگام بعدی با جایگذاری $X.W, Y.W, Z.W$ به جای x,y,z در نامساوی هلاوکا برای $n=1$ و سپس انتگرال گیری بر کره $\mathbb{S}^{n-1}$، نامساوی هلاوکا را در $\mathbb{R}^n$ نتیجه بگیرید.

توجه: این نامساوی راه حل دیگری هم دارد که میتوانید آن را با کلید واژه نامساوی هلاوکا [1] جستجو کنید.

---

[1] Hlawka's-Inequality

۳. تابع

$$\begin{cases} H:\mathbb{R}^۴\to\mathbb{R}^۳ \\ H(x,y,z,w)=\left(x^۲+y^۲-z^۲-w^۲,۲(xw+yz),۲(yw-xz)\right) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه نگاشت ضمنی بررسی کنید که برای کدام مقادیر (a,b,c)، دستگاه معادلات $H(x,y,z,w)=(a,b,c)$ یک خم مانند $\eta_{(a,b,c)}$ در $\mathbb{R}^۴$ است. آیا می‌توانید $\eta_{(a,b,c)}$ را در $\mathbb{R}^۴$ توصیف کنید؟ نگاشت H را نگاشت هاپف [۲] نامند. برای اطلاعات بیشتر کلید واژه تارسازی هاپف [۳] را جستجو کنید. شاید برایتان جالب باشد که بدانید این نگاشت به مطالعه چنبره، ارتباط دورانهای سه بعدی با تعمیمی از اعداد مختلط به نام کواترنیون ها، [۴] توپولوژی جبری و حتی مکانیک سیالات و جوابی از معادله ناویر–استوکس [۵] در حالت شار تراکم پذیر و شاخه های دیگری از ریاضی ارتباط دارد.

۴. با در نظر داشتن نگاشت

$$\begin{cases} S:\mathbb{R}^۴\to\mathbb{R}^۳ \\ S(x,y,z,w)=\left(\frac{x}{۱-w},\frac{y}{۱-w},\frac{z}{۱-w}\right) \end{cases}$$

$\gamma_{(a,b,c)}:=S(\eta_{(a,b,c)})$ را توصیف کنید. منظور از $\gamma_{(a,b,c)}:=S(\eta_{(a,b,c)})$ تصویر خم $\eta_{(a,b,c)}$ بدست آمده در تمرین ۳ تحت نگاشت S در $\mathbb{R}^۳$ است. برای اطلاعات بیشتر در مورد نگاشت S می‌توانید کلید واژه نگاشت گنجنگاری [۶] را جستجو نمایید.

۵. بنا بر تعریف، خم بسته γ، تابعی است مانند $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ که $\gamma(a)=\gamma(b)$ و در اینجا منظور از خم هموار $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ خمی است که $\gamma':(a,b)\to\mathbb{R}^n$ پیوسته باشد و نه لزوما ناصفر. برای هر دو خم هموار و بسته $\gamma_۱,\gamma_۲:[۰,۲\pi]\to\mathbb{R}^۳$، عدد پیوندی [۷] این دو خم را به بصورت

$$\operatorname{link}(\gamma_۱,\gamma_۲):=\frac{۱}{۴\pi}\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{۲\pi}\frac{\det[\dot{\gamma_۱}(t),\dot{\gamma_۲}(s),\gamma_۱(t)-\gamma_۲(s)]}{|\gamma_۱(t)-\gamma_۲(s)|^۳}dtds$$

تعریف می‌کنند. برای هر $K:=(a,b,c)$ بطوریکه $a^۲+b^۲+c^۲=۱$، خم $\gamma_K:=S(\eta_K)$ که در تمرینهای ۳ و ۴ از آنها یاد شد را درنظربگیرید. حال برای هر $K_۱\neq K_۲$ مطلوبست محاسبه $\operatorname{link}(\gamma_{K_۱},\gamma_{K_۲})$.

---

[۲] Hopf–map
[۳] Hopf–fibration
[۴] quaternion
[۵] Navier–Stokes
[۶] stereographic–map
[۷] linking–number