به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

تمرینهای سری سیزدهم درس ریاضی عمومی دو نیمسال تحصیلی ۱۴۰۳۱

---

۱. با استفاده از ایده مشتق گیری نسبت به x, y، مطلوبست محاسبه عبارت زیر.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt \qquad x\ ,\ y > 0$$

۲. با استفاده از انتگرال معروف $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ و جایگزین کردن t با xt در آن و سپس مشتق گیری نسبت به x در عبارت حاصل، مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt$$

۳. نشان دهید عبارت $F(x) = \lim_{m \to +\infty} \int_{0}^{m} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ برای هر $x > 0$ وجود دارد و $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$. سپس با مشتق گیری نسبت به x و قاعده جز به جز، مقدار $\lim_{x \to 0^+} F(x)$ را محاسبه کنید و نشان دهید

$$\lim_{l \to +\infty} \int_{0}^{l} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \to 0^+} F(x)$$

۴. مطلوبست محاسبه مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ که در آن $|x|, |y| \leq 1\ ,\ z > 0$.

۵. مقدار $\iint_S (y/x) dA$ را محاسبه کنید وقتی S بخشی از قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ است که در ربع اول و زیر خط $y = x$ قرار گرفته است.

۶. برای $a, b, c > 0$، مساحت آن قسمت از صفحه $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ را بیابید که درون بیضی گون $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$ قرار می گیرید.

۷. میدان برداری با مشتقات جزیی پیوسته

$$f : \{(x, y) \mid x \neq 0\} \to \mathbb{R}^2\ ,\ f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$
$$(f_1(-x, y), f_2(-x, y)) = (-f_1(x, y), f_2(x, y))$$

مفروض است. میدان برداری $F : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ ناشی از دوران f حول محور z را به دست آورید و نشان دهید این میدان برداری دارای مشتقات جزیی پیوسته است.

۸. میدان برداری با مشتقات جزیی پیوسته $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ چه شرطی داشته باشد که بتوان آن را حول محور z دوران داد و میدان جدید همه جا و از جمله در محور z به هر نقطه تنها یک بردار نظیر کند و دارای مشتق های جزیی پیوسته باشد؟

۹. اگر f و g دو میدان اسکالر با مشتقات جزیی پیوسته در ناحیه همبند D باشند. نشان دهید برای هر خم قطعه قطعه هموار γ در D از نقطه p تا q داریم

$$\int_\gamma f\nabla g.dr = f(q)g(q) - f(pg(p)) - \int_\gamma g\nabla f.dr$$

این اتحاد، یکی از تعمیمهای قاعده جز به جز است.

۱۰. الف) مطلوبست محاسبه انتگرال میدان برداری $P(x,y)=-y/(x^۲+y^۲)\ ,\ Q(x,y)=x/(x^۲+y^۲)$ روی دایره به شعاع r با حرکت در جهت خلاف عقربه های ساعت.

ب) بررسی کنید که $Q_x-P_y=\circ$. اگر از قضیه گرین در درون دایره استفاده کنیم، انتگرال قسمت الف، صفر به دست می آید، ولی چنین نشده است. ایراد کجاست؟ توضیح دهید.

ج) برای خم γ آیا $\int_\gamma Pdx+Qdy$ میتواند بیانگر یک مفهوم هندسی باشد؟ توضیح دهید.

۱۱. مطلوبست محاسبه سطح کره کون $x^۲/a^۲+y^۲/a^۲+z^۲/c^۲=۱$. کره گونها، بیضی گونهایی هستند که طول یکی از سه قطر اصلی، با یکی دیگر برابر باشد.

۱۲. سطح پارامتری زیر را توصیف و سطح آن را محاسبه کنید.

$$x=au\cos v\ ,\ y=au\sin v\ ,\ z=bv \quad u\in[\circ,۱]\ ,\ v\in[\circ,۲\pi]$$

۱۳. روی صفحه P به معادله $ax+by+cz=d\neq\circ$، $\iint_P r^{-۳}\,dS$ را محاسبه کنید که در آن $r^۲=x^۲+y^۲+z^۲$.

۱۴. یادآوری مهم: منظور از شار یک میدان برداری که از یک سطح جهتدار عبور میکند، انتگرال مولفه قائم آن میدان روی سطح جهتدار مذکور است و آن را شار آن میدان در امتداد رویه یاد شده گویند. اگر رویه بسته باشد و بردار نرمال آن برون سو باشد، گوییم شار میدان خارج رویه است و در غیر این صورت گوییم شار میدان دورن رویه است.

اکنون میدان برداری $F=X/|X|^۳$ که در آن منظور از X، (x,y,z) می باشد، داده شده است.

الف) مطلوبست محاسبه انتگرال شار این میدان خارج از مکعب $\{(x,y,z)\mid |x|,|y|,|z|\leq a\}$

ب) مطلوبست محاسبه انتگرال شار این میدان خارج از مکعب $\{(x,y,z)\mid \circ\leq b\leq|x|,|y|,|z|\leq c\}$

۱۵. پرمایشی برای رویه موبیوس به دست آورید و سچس نشان دهید که رویه پارارمتری که ارائه کرده اید جهت پذیر نیست. یعنی نمیتوان یک میدان برداری نرمال به آن یافت که با حرکت کردن روی رویه شما دارای مشتقات جزیی پیوسته است.

۱۶. رویه پارامتری

$$r(u,v)=(\cos ۲u)(۲+v\cos u)\hat{\mathbf{i}}+(\sin ۲u)(۲+v\cos u)\hat{\mathbf{j}}+(v\sin u)\hat{\mathbf{k}} \quad v\in[-۱,۱]\ ,\ u\in[-\pi,\pi]$$

و بردار $N(u,v)$ یکه و عمود به رویه مذکور در نقطه $r(u,v)$ و دارای مشتقات جزیی پیوسته نسبت به u,v مفروض هستند. نشان دهید برای میدان برداری دلخواه F با مشتقات جزیی پیوسته در $\mathbb{R}^۳$، $\iint_S F.NdS = ۰$. این امر را توضیح دهید. راهنمایی: شکل رویه را توصیف کنید.

۱۷. در اینجا، منظورمان از $B_{a,b,c}(p)$ و N ، به ترتیب جعبه مکعب مستطیلی به مرکز p با اضلاع موازی محورهای مختصات و طول $۲a, ۲b, ۲c$ و بردار یکه و عمود (برون سو) به مرز این مکعب مستطیل است. نشان دهید برای میدان برداری دلخواه F با مشتقات جزیی پیوسته در $\mathbb{R}^۳$

$$\lim_{a,b,c\to ۰^+} \frac{۱}{۸abc} \iint_{B_{a,b,c}(p)} F.NdS = \mathrm{div}(F)_p$$

۱۸. در اینجا، منظورمان از $S^۲_{r,p}$ و N ، به ترتیب کره به شعاع r و به مرکز p و بردار نرمال یکه برون سو به کره مذکور است. نشان دهید برای میدان برداری دلخواه F با مشتقات جزیی پیوسته در $\mathbb{R}^۳$

$$\lim_{r\to ۰^+} \frac{۳}{۴\pi r^۳} \iint_{S^۲_{r,p}} F.NdS = \mathrm{div}(F)_p$$

۱۹. یادآوری نمادگذاری: برای میدان اسکالر $f : U \subset \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}$ و میدان برداری $F, G : U \subset \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ همگی با مشتقات جزیی پیوسته تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned}
&F.G = F_۱G_۱ + F_۲G_۲ + F_۳G_۳\\
&\mathrm{grad} f = \nabla f = \Big(\frac{\partial}{\partial x}f\Big)\hat{\mathbf{i}} + \Big(\frac{\partial}{\partial y}f\Big)\hat{\mathbf{j}} + \Big(\frac{\partial}{\partial z}f\Big)\hat{\mathbf{k}}\\
&\mathrm{div}(F) = \nabla.F = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big).F = \frac{\partial F_۱}{\partial x} + \frac{\partial F_۲}{\partial y} + \frac{\partial F_۳}{\partial z} = \mathrm{tr}(DF)\\
&\mathrm{curl}(F) = \nabla \times F = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) \times F = \det\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_۱ & F_۲ & F_۳ \end{pmatrix}\\
&(G.\nabla)F = G_۱\frac{\partial F}{\partial x} + G_۲\frac{\partial F}{\partial y} + G_۳\frac{\partial F}{\partial z} = (DF)G\\
&\Delta f = \nabla^۲ f = \Big(\frac{\partial^۲}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲}{\partial z^۲}\Big)f\\
&\nabla^۲ F = (\nabla^۲ F_۱)\hat{\mathbf{i}} + (\nabla^۲ F_۲)\hat{\mathbf{j}} + (\nabla^۲ F_۳)\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

میدانهای اسکالر ψ , ϕ و میدانهای برداری G , F همگی با مشتقات جزیی پیوسته روی $\mathbb{R}^۳$ مفروض هستند. اتحادهای دیفرانسیل برداری زیر را ثابت کنید.

$$\nabla^۲\phi = \nabla.(\nabla\phi) \qquad (۱)$$

یا به عبارت دیگر
$$\Delta\phi = \text{div}(\text{grad}\phi)$$

$$\nabla \times (\nabla\phi) = ۰ \qquad (۲)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{curl}(\text{grad}\phi) = ۰$$

$$\nabla.(\nabla \times F) = ۰ \qquad (۳)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{div}(\text{curl}F) = ۰$$

$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla.F) - \nabla^۲ F \qquad (۴)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{curl}(\text{curl}F) = \text{grad}(\text{div}F) - \Delta F$$

$$\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi) \qquad (۵)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{grad}(\phi\psi) = (\text{grad}\phi)\psi + \phi(\text{grad}\psi)$$

$$\nabla.(\phi F) = (\nabla\phi).F + \phi(\nabla.F) \qquad (۶)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{div}(\phi F) = (\text{grad}\phi).F + \phi(\text{div}F)$$

$$\nabla \times (\phi F) = (\nabla\phi) \times F + \phi(\nabla \times F) \qquad (۷)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{curl}(\phi F) = (\text{grad}\phi) \times F + \phi(\text{curl}F)$$

$$\nabla.(F \times G) = (\nabla \times F).G - F.(\nabla \times G) \qquad (۸)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{div}(F \times G) = (\text{curl}F).G - F.(\text{curl}G)$$

$$\nabla \times (F \times G) = (\nabla.G)F + (G.\nabla)F - (\nabla.F)G - (F.\nabla)G \qquad (۹)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{curl}(F \times G) = (\text{div}G)F + (DF)G - (\text{div}.F)G - (DG)F$$

$$\nabla(F.G) = F \times (\nabla \times G) + G \times (\nabla \times F) + (F.\nabla)G + (G.\nabla)F \qquad (۱۰)$$

یا به عبارت دیگر
$$\text{grad}(F.G) = F \times (\text{curl}G) + G \times (\text{curl}F) + (DG)F + (DF)G$$

۲۰. می دانیم برای سه بردار $a\ ,\ b\ ,\ c \in \mathbb{R}^۳$ داریم

$$a.(b \times c) = c.(a \times b) = b.(c \times a)$$
$$a \times (b \times c) = (c.a)b - (b.a)c$$

آیا میتوان از اتحادهای بالا استفاده کرد و با جایگذاری ∇ به جای یک کدام از بردارها و جایگذاری G, F به جای دو بردار دیگر، اتحادهای سوال قبل را نتیجه گرفت؟ چرا؟