



درس ریاضی عمومی ۲
نیم‌سال اول ۰۴-۰۳
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری دوازدهم

دانشکده علوم ریاضی

۱. عبارت $\frac{1}{1-xy}$ را به عنوان یک سری هندسی بسط دهید، سپس نشان دهید.

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

۲. به فرض P موازی السطوحی باشد که با سه جفت صفحه موازی کراندار شده است. معادله صفحات برابر با

$$a \cdot r = 0, \quad a \cdot r = d_1 > 0$$

$$b \cdot r = 0, \quad b \cdot r = d_2 > 0$$

$$c \cdot r = 0, \quad c \cdot r = d_3 > 0$$

است، که در آن بردارهای ثابتی هستند و $r = xi + yj + zk$. نشان دهید:

$$\iiint_P (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) dx dy dz = \frac{(d_1 d_2 d_3)^2}{8|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

راهنمایی: از تغییر متغیر $u = a \cdot r$, $v = b \cdot r$ و $w = c \cdot r$ استفاده کنید.

۳. حجم ناحیه کراندار شده با معادله $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$ را بیابید.

۴. حجم ناحیه کراندار شده با معادله $|x|^{\frac{1}{3}} + |y|^{\frac{1}{3}} + |z|^{\frac{1}{3}} = |a|^{\frac{1}{3}}$ را بیابید.

۵. خم انتگرال میدان برداری $F = yi - xj + k$ را به دست آورید و آن را توصیف کنید.

۶. نشان دهید میدان زیر پایسته می‌باشد. پتانسیل آن را پیدا کنید و نقاط هم پتانسیل را توصیف کنید. همچنین خطوط میدان F را پیدا کنید.

$$F = \frac{2x}{z}i + \frac{2y}{z}j - \frac{x^2 + y^2}{z^2}k$$

۷. در هر مورد مشخص کنید آیا مجموعه داده شده یک دامنه است؟ یک دامنه همبند چطور؟ آیا دامنه همبند ساده است؟

(الف) مجموعه نقاط (x, y) در صفحه بطوریکه $x > 0$ و $y \geq 0$ باشد.

ب) مجموعه نقاط (x, y, z) در فضای سه بعدی بطوریکه $x^2 + y^2 > 1$

۸. شار میدان برداری $F = xi + yj$ به سمت بالا گذرنده از بخشی از رویه $z = 2 - x^2 - 2y^2$ که بالای صفحه xy قرار می‌گیرد را به دست آورید.

۹. مقدار انتگرال $\oint_C (\sin x + 3y^2)dx + (2x - e^{-y^2})dy$ را محاسبه کنید که در آن C مرز نیم دیسک $x^2 + y^2 \leq a^2$ و $y \geq 0$ است و خم در خلاف جهت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است.

۱۰. مقدار انتگرال $\oint_C x^2 y dx - xy^2 dy$ را محاسبه کنید که در آن C مرز ناحیه $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$ است و در جهت عقربه‌های ساعت جهت‌دار شده است.

۱۱. میدان برداری $F = (x^2 + y + 2 + z)i + (e^{x^2} + y^2)j + (3 + x)k$ را در نظر بگیرید. به فرض $a > 0$ و S قسمتی از رویه کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2az + 3a^2$ باشد که در بالای صفحه xy قرار می‌گیرد. مطلوبست شار میدان برداری F به سمت بیرون روی ناحیه S را به دست آورید.

۱۲. مقدار انتگرال $\iint_S (3xz^2 i - xj - yk) \cdot \hat{N} dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از استوانه $y^2 + z^2 = 1$ می‌باشد که در یک هشتم اول مابین صفحات $x = 1$ و $x = 0$ واقع شده است.

۱۳. مقدار انتگرال $\oint_C y dx - x dy + z^2 dz$ محاسبه کنید، که در آن خم C اشتراک دو رویه $z = y^2$ و $x^2 + y^2 = 4$ می‌باشد و از نگاه بیننده که در نقطه بالای محور z ایستاده است در خلاف جهت عقربه‌های ساعت جهت‌دهی شده است.

۱۴. مقدار انتگرال $\iint_S \text{curl} F \cdot \hat{N} dS$ را محاسبه کنید، که در آن S رویه $6 = x^2 + y^2 + 2(z - 1)^2$ و $z \geq 0$ است و جهت \hat{N} بردار یکه رو به بیرون (به سمت بیرون از مرکز) عمود بر رویه S است و میدان برداری برابر:

$$F = (xz - y^2 \cos z)i + x^2 e^z j + xyz e^{x^2 + y^2 + z^2} k$$

می‌باشد.