به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۲
نیم‌سال اول ۰۴-۰۳
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری نهم

دانشکده علوم ریاضی

---

۱. نقاط بحرانی توابع زیر را مشخص کنید و نوع هر نقطه را مشخص کنید.

الف) $f(x,y) = x^۲ + ۲y^۲ - ۴x + ۴y$

ب) $f(x,y) = \cos x + \cos y$

ج) $f(x,y) = xe^{-x^۲+y^۲}$

د) $f(x,y) = \frac{۱}{۱-x+y+x^۲+y^۲}$

۲. قیمت موادی که باید برای ساخت کف یک جعبه مورد استفاده قرار بگیرد در هر واحد مساحت دو برابر قیمت مواد مورد استفاده برای کناره‌ها و بالای جعبه می‌باشد. ابعاد جعبه ای به حجم V را پیدا کنید بطوریکه قیمت تمام شده جعبه کمینه شود.

۳. در بین تمام مکعب مستطیل‌هایی که اضلاع آن موازی محورهای مختصات می‌باشند و درون بیضی‌گون $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$ قرار گیرند، مکعب مستطیلی را پیدا کنید که دارای بیشترین حجم ممکن باشد.

۴. نقاط بحرانی تابع $z = g(x,y)$ را پیدا کنید که در معادله $e^{۲zx-x^۲} - ۳e^{۲zy+y^۲} = ۲$ صدق می‌کند.

۵. نقاط بیشینه تابع $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ را بر روی ناحیه محصور توسط محورهای مختصات و خط $x+y = \pi$ پیدا کنید.

۶. اگر تابع $T(x,y) = (x+y)e^{-x^۲-y^۲}$ نمایانگر درجه حرارت در هر نقطه باشد. آنگاه گرمترین و سردترین نقاط را روی دیسک واحد بدست آورید. مجموعه نقاط $D = \{(x,y)|x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$ را دیسک واحد گوییم.

۷. فاصله کره واحد به مرکز مبدا و کره به شعاع ۱۰ به مرکز $(۱,۲,۳)$ را در فضای سه بعدی به کمک قضیه ضریب لاگرانژ بدست آورید. (فاصله بین دو مجموعه کمترین فاصله بین نقاط آن دو مجموعه است.

۸. نقاطی از داخل بیضی‌گون $x^۲ + ۴y^۲ + ۹z^۲ \leq ۱۰۸$ که تابع $f(x,y) = x + ۲y - ۳$ روی آنها کمینه یا بیشینه است را به دست آورید.

۹. فرض کنید $F(x,y,z,w)$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق‌های پیوسته از $\mathbb{R}^۴$ به $\mathbb{R}^۲$ است و

$$D_{P_۰}F=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix},\quad F(P_۰)=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix},\quad M=\{\begin{bmatrix}w\\ x\\ y\\ z\end{bmatrix}: F(w,x,y,z)=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}\}$$

الف) نشان دهید روی مجموعه M و نزدیک نقطه $P_۰$ هر کدام از دو متغیر w,x,y,z را می‌توان به‌عنوان تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر دیگر نوشت و مقدار $(\frac{\partial w}{\partial x})_y$ و $(\frac{\partial w}{\partial x})_z$ را در نقطه متناظر $P_۰$ محاسبه کنید.

ب) آیا روی مجموعه M، تابع $g(w,x,y,z)=w+x+y+z$ می‌تواند بیشینه (یا کمینه) خود را در نقطه $P_۰$ کسب کند؟