به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

درس ریاضی عمومی ۲
نیم‌سال اول ۰۴-۰۳
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری هشتم

---

۱. در هر قسمت مشتق، نسبت به متغیر خواسته شده را از معادلات به دست آورید. آنگاه تعیین کنید چه شرطی باید برقرار باشد تا معادله نسبت به متغیر مشخص شده دارای جواب باشد؟

الف) محاسبه $\frac{\partial y}{\partial z}$ در معادله $e^{yz} - x^{۲} z \ln y = \pi$.

ب) محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$ اگر داشته باشیم $F(x^{۲} - z^{۲}, y^{۲} + xz) = ۰$ که در آن F دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته می‌باشد.

ج) محاسبه $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ اگر معادلات به شکل زیر باشند: (منظور از z در عبارت $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ این است که z دیگر متغیر مستقل است و متغیر وابسته x تابعی از y و z است.)

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} + w^{۲} = ۱.$$
$$x + ۲y + ۳z + ۴w = ۲.$$

د) با معادلات قسمت قبل عبارت $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w$ را محاسبه کنید. آیا با قسمت قبل برابر است؟ جواب خود را توضیح دهید.

۲. نشان دهید می‌توانیم دستگاه معادلات داده شده را حول نقطه $(x, y, z, u, v) = (۱, ۱, ۱, ۱, ۱)$ برای x, y, z به عنوان توابعی از u, v حل کنیم. سپس مقدار $\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_v$ را در نقطه $(u, v) = (۱, ۱)$ به دست آورید.

$$xy^{۲} + zu + v^{۲} = ۳$$
$$x^{۳}z + ۲y - uv = ۲$$
$$xu + yv - xyz = ۱$$

۳. اگر $F(x, y, z) = ۰$ آنگاه درستی رابطه زیر را نشان دهید.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -۱$$

۴. نشان دهید اگر معادلات $F(x, y, u, v) = ۰$ و $G(x, y, u, v) = ۰$ برای x و y به عنوان توابعی از u, v حل شوند. آنگاه داریم:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big/ \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$$

۵. نشان دهید که معادله

$$F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0$$

را می‌توان نسبت به z بر حسب توابعی از x و y در مجاورت نقطه $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ حل کرد. که در آن F تابعی حقیقی مقدار با مشتق‌های مرتبه اول پیوسته است. به علاوه داریم.

$$F_1(1, 1) = -1, \quad F_2(1, 1) = 2$$

در آخر مقدار $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ در نقطه $(1, 1, 0)$ محاسبه کنید.

۶. نشان دهید اگر معادلات $x = f(u, v)$ و $y = g(u, v)$ را برای u و v بر حسب توابعی از x و y حل کنیم آنگاه رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 / \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

۷. معادله مرز ناحیه ای که توسط خم‌های $x \cos c + y \sin c = 1$ با تغییر c در اعداد حقیقی حاصل می‌شود، را بیابید. گفتنی است، مرز حاصل از حرکت دسته نمودارها را پوش آن دسته از نمودارها نامند.

۸. نگاشت $z = z(x, y)$ در رابطه $z^3 - 2xz + y = 0$ صدق می‌کند که در آن $z(1, 1) = 1$. تمام مشتقات مرتبه اول و مرتبه دوم z در نقطه $(1, 1)$ را به دست آورید.

۹. فرض کنید f, g توابع حقیقی مقداری باشند که بر روی $\mathbb{R}^2$ تعریف شده اند. می‌گوییم f و g به طور تابعی به یکدیگر وابسته هستند هرگاه تابع حقیقی مقدار و مشتق‌پذیر روی $\mathbb{R}$ مانند $k(t)$ وجود داشته باشد که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x, y) = k(g(x, y))$. نشان دهید اگر f و g وابسته تابعی باشند آنگاه دترمینان ژاکوبی متناظر با نگاشت $(x, y) \to (f(x, y), g(x, y))$ برابر صفر است.

حال فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر با مشتق‌های جزئی پیوسته باشند بطوریکه $\frac{\partial g}{\partial y}$ هیچ جا صفر نشود. در این حالت نشان دهید اگر دترمینان ژاکوبی متناظر با نگاشت $(x, y) \to (f(x, y), g(x, y))$ متحد با صفر باشد آنگاه f و g به طور موضعی وابسته تابعی می‌باشند.