



درس ریاضی عمومی ۲
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری هفتم

دانشکده علوم ریاضی

۱. معادله صفحه مماس و خط عمود بر نمودار تابع $f(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ را در نقطه $(\pi, 4)$ به دست آورید.

۲. مختصات تمام نقاط رویه $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ ، که در آن رویه دارای صفحه مماس افقی است را بیابید.

۳. توابع مشتق‌پذیر $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مفروضند. به فرض $g(q_0) = p_0$ و همه مشتقات پارهای مرتبه دوم تابع g در نقطه q_0 برابر صفر باشد. بعلاوه داشته باشیم:

$$p_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f(p_0) = 1, \quad \nabla f(p_0) = [1 \quad -2 \quad -1], \quad Hf(p_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$q_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad D_{q_0}g = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

الف) تقریب‌های خطی توابع f و g را در نقطه‌های p_0 و q_0 به دست آورید.

ب) بردار عمود بر نمودار تابع $f \circ g$ را در نقطه متناظر q_0 بدست آورید.

ج) بردار عمود بر مجموعه تراز $f \circ g$ را در نقطه متناظر q_0 بدست آورید.

د) همه مشتق‌های مرتبه اول و دوم تابع $f \circ g$ را در نقطه q_0 بدست آورید.

ه) جهت حرکت یک مورچه در \mathbb{R}^2 از نقطه q_0 چه باشد که بیشترین کاهش مقدار $f \circ g$ را مشاهده کند.

۴. مشتق جهتی تابع دترمینان در ماتریس A (که لزوما وارون پذیر نیست) در جهت ماتریس B را محاسبه کنید.

۵. اتاق بزرگی را در نظر بگیرید که دمای داخل آن به حالت تعادل درآمده است و فرض کنید با قرار دادن مناسب محورهای مختصات در اتاق، دما در نقطه (x, y, z) از قانون $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ پیروی می‌کند.

الف) کوره‌ای به شعاع واحد و به مرکز مبدا مختصات را در اتاق در نظر بگیرید و فرض کنید دماسنجی با تندی ثابت روی کوره در حال حرکت است. اگر دماسنج در لحظه $t = 0$ در نقطه $(\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}})$ از کوره قرار داشته باشد، مشخص کنید حرکت دماسنج در چه جهتی باشد که بیشترین نرخ تغییرات دما را داشته باشد؟

ب) فرض کنید γ خمی باشد که مسیر حرکت دماسنج دیگری در اتاق را نشان می‌دهد. همچنین، فرض کنید به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ تساوی زیر برقرار باشد:

$$\gamma'(t) = \frac{\nabla T}{\|\nabla T\|^2}(\gamma(t))$$

اگر دماسنج در لحظه $t = 0$ در نقطه $(1, 0, 0)$ قرار داشته باشد، در زمان $t = 20$ چه دمایی نشان خواهد داد؟

۶. در هر قسمت مشتق تابع داده شده را محاسبه کنید. سپس با استفاده از نقاط نزدیکی که مقدار آن مشخص است، مقدار تابع در نقاط خواسته شده را تقریب بزنید.

الف) تابع $z = x^2 e^{xy}$ در نقطه $x = 3, y = 0.5$ را محاسبه کنید.

ب) تابع $u = x \sin(x + y)$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}, y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$ را محاسبه کنید.

۷. در کدام جهت در نقطه (a, b, c) تابع $f(x, y, z)$ نصف حداکثر مقدار افزایش خود را در آن نقطه خواهد داشت؟

۸. به فرض تابع $Df(x, y)$ در نقطه (a, b) پیوسته باشد. زاویه بین دو بردار v_1 و v_2 در چه شرطی صدق کند تا بتوانیم از مشتق‌های جهتی $D_{v_1} f(x, y)$ و $D_{v_2} f(x, y)$ بردار گرادیان در آن نقطه را مشخص کنیم؟

۹. اگر v یک بردار ناصفر باشد. عبارت $D_v(D_v f(x, y))$ را بر حسب درایه‌های v و مشتق‌های جزئی مرتبه دوم بیان کنید. تفسیر این مقدار برای یک ذره متحرک چه می‌باشد؟