به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

درس ریاضی عمومی ۲
نیم‌سال اول ۰۴-۰۳
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری ششم

---

۱. به فرض $f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد و داشته باشیم $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. مقدار $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ را بر حسب مشتق‌های جزئی f نسبت به x و y محاسبه کنید.

۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$، $z = f(x,y)$ ، تابعی باشد که دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته روی $\mathbb{R}^2$ است. قرار می‌دهیم $x = (1+v)e^u$ و $y = (1-v)e^u$. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (y-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

الف) مشتقات پاره‌ای مرتبه اول x و y را نسبت به u به دست آورید و با جایگذاری آن‌ها در عبارت داده شده، عبارت را به صورت "(یک عبارت)$\frac{\partial}{\partial u}$" بنویسید.

ب) به کمک قسمت قبل، عبارت داده شده را بر حسب مشتقات پاره‌ای z نسبت به u و v به صورت ساده شده بازنویسی کنید.

۳. الف) ماتریس ژاکوبین تبدیل $f(\rho,\phi,\theta) = (x,y,z)$ را به دست آورید که در آن

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\phi.$$

در اینجا (ρ,ϕ,θ) مختصات کروی در دستگاه xyz می‌باشد.

ب) معادله لاپلاس یعنی $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ در مختصات کروی چگونه خواهد بود؟

۴. اگر داشته باشیم $f(x,y,z) = |r|^{-n}$ که در آن $r = xi + yj + zk$ نشان دهید $\nabla f = \frac{-nr}{|r|^{n+2}}$

۵. نشان دهید در مختصات قطبی (r,θ) گرادیان تابع $f(r,\theta)$ برابر

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta}$$

می‌باشد که در آن $\hat{r}$ بردار یکه در جهت بردار مکان $r = xi + yj$ است و بردار $\hat{\theta}$ یکه عمود بر بردار $\hat{r}$ در جهت افزایش θ می‌باشد.

۶. به فرض تابع $f(x,y)$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد. عبارت زیر را بر حسب مشتق‌های جزئی تابع f محاسبه کنید.

$$\frac{\partial}{\partial y} f(yf(x,t), f(y,t))$$

۷. تابع $f(x,y)$ با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{۲xy(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

الف) نشان دهید که برای همه نقاط رابطه $f(x,y) = -f(y,x)$ برقرار است.

ب) نشان دهید برای هر $(x.y) \neq (۰,۰)$ داریم $f_۱(x,y) = -f_۲(y,x)$ و در نتیجه $f_{۱۲}(x,y) = -f_{۲۱}(y,x)$

ج) نشان دهید برای تمام y ها $f_۱(۰,y) = -۲y$ و در نتیجه $f_{۱۲}(۰,۰) = -۲$

د) نشان دهید برای تمام x ها $f_۲(x,۰) = ۲x$ و در نتیجه $f_۲۱(۰,۰) = ۲$

ه) توضیح دهید که چرا نتایج قسمت‌های قبل با قضیه تعویض ترتیب مشتق گیری جزئی در تناقض نیست؟

۸. به فرض تابع $f(x,y)$ بطور مثبت همگن از مرتبه k باشد یعنی برای هر $t \geq ۰$ رابطه $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$ است. همچنین این تابع دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. نشان دهید رابطه زیر برقرار است.

$$x^۲ f_{۱۱}(x,y) + ۲xyf_{۱۲}(x,y) + y^۲ f_{۲۲}(x,y) = k(k-۱)f(x,y)$$