



درس ریاضی عمومی ۲  
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴  
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری پنجم

دانشکده علوم ریاضی

۱. گراف توابع داده شده را رسم کنید.

$$\text{الف) } f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0$$

$$\text{ب) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

۲. سطح تراز توابع زیر را توصیف کنید.

$$\text{الف) } f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{ب) } f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$

$$\text{ج) } f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

۳. در حدود زیر در صورت وجود حد، آن را محاسبه کنید یا عدم وجود حد را اثبات کنید.

$$\text{الف) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\text{ب) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\text{ج) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

۴. تحت چه شرایطی بر روی  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، حد  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{ax^2 + bxy + cy^2}$  موجود است. ادعای خود را اثبات کنید.

۵. در هر قسمت نشان دهید تابع داده شده، جوابی برای معادله مربوطه می‌باشد.

$$\text{الف) } z = \frac{x+y}{x-y}, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\text{ب) } z = f(x^2 - y^2) \quad \text{جوابی برای معادله } y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ است. که در آن تابع } f, \text{ تابعی تک متغیره و مشتق پذیر است.}$$

۶. ابتدا نشان دهید تابع  $f(x, y)$  در مبدا پیوسته نمی‌باشد. سپس وجود مشتقات جزئی در مبدا را نشان دهید که این مشتقات جزئی در مبدا پیوسته نمی‌باشند. در نتیجه بر خلاف توابع تک متغیره وجود مشتقات جزئی، پیوستگی تابع را نتیجه نمی‌دهد.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۷. نشان دهید توابع زیر جواب معادله  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  هستند.

الف) تابع  $\ln(x^2 + y^2)$  در همه جا به جز مبدا

ب) تابع  $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$  در همه جا به جز محور  $y$  ها

تابع  $f$  را هارمونیک گوئیم هرگاه رابطه  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  برقرار باشد.