



درس ریاضی عمومی ۲  
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴  
استاد: دکتر جمالی، دکتر مستفید

تمرین سری چهارم

دانشکده علوم ریاضی

۱. قرینه خم  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  را نسبت به صفحه  $x + y + z = 1$  بیابید.

۲. کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  و صفحه  $ax + by + cz = 0$  داده شده است. خم حاصل از اشتراک این دو را بر حسب طول پرمایش کنید. (این خم یک دایره است که آن را دایره عظیمه نامند، یعنی دایره ای حاصل از اشتراک کره با صفحه ای گذرنده از مرکز کره)

۳. دایره ای به شعاع یک به روی دایره ای به شعاع  $k$  داده شده اند.

الف) اگر دایره کوچکتر از بیرون روی دایره بزرگتر از نقطه ای شروع به چرخیدن کند و به جای اول خود برگردد، دایره کوچکتر چند دور به دور خود چرخیده است؟ (به توضیح پایین مراجعه کنید).

ب) بخش الف را با تفاوت حل کنید که دایره کوچکتر از دورن روی دایره بزرگتر بچرخد.

توضیح در مورد میزان چرخیدن به دور خود:

مرکز دایره را  $O$  مینامیم. نقطه دلخواه  $P$  روی دایره را در نظر میگیریم. زاویه  $OP$  با جهت مثبت محور  $x$  ها را  $\theta$  مینامیم. حال اگر این دایره به صورت پیوسته شروع به چرخیدن کند، میپذیریم که زاویه مذکور به صورت یک تابع پیوسته تغییر میکند. با توضیحات بالا، اگر زاویه ابتدایی را با  $\theta_1$  و زاویه انتهایی را با  $\theta_2$  نشان دهیم، منظور از اینکه دایره مورد نظر، چند دور به دور خودش میچرخد عبارت  $|\theta_2 - \theta_1| / (2\pi)$  است.

۴. روی کره منظور از مثلث، سه راس است که با دایره عظیمه به هم وصل شده اند. (تمرین ۲ را نگاه کنید). همچنین یادآوری میکنیم که منظور از زاویه دو خم در نقطه تقاطعشان، زاویه بردار مماس آن دو خم در نقطه مورد نظر است.

روی کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  مثالی را در نظر بگیرید که یک راس آن  $B = (0, 0, 1)$  و راس قائمه  $A$  در ربع اول صفحه  $xz$  قرار دارد و طول قطاع دایره  $AB$  برابر  $\varphi \in (0, \pi/2)$  و زاویه راس  $B$  برابر  $\theta \in (0, \pi/2)$  باشد،

الف) مطلوبست به دست آوردن مختصات نقطه  $C$  برحسب  $\theta$  و  $\varphi$ . (نقطه  $C$  در یک هشتم اول قرار دارد)

ب) مطلوبست محاسبه طول ضلع دیگر قائمه یا همان طول قطاع  $AC$  و طول وتر یا همان طول قطاع  $BC$  برحسب  $\theta$  و  $\varphi$ .

ج) مطلوبست محاسبه زاویه راس  $C$  برحسب  $\theta$  و  $\varphi$ .

۵. دو ماتریس  $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times k}$  و  $B(t) = [b_{ij}(t)]_{k \times m}$  با درایه های مشتق پذیر داده شده اند.

الف) مطلوبست محاسبه  $\frac{d}{dt}[A(t)B(t)]$  برحسب  $\frac{d}{dt}A(t)$  و  $\frac{d}{dt}B(t)$  و  $A(t)$  و  $B(t)$ .

ب) با فرض اینکه  $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$  و برای  $t \in (\alpha, \beta)$  ماتریس  $A(t)$  وارون پذیر است و تمام درایه های آن مشتق پذیر هستند، مطلوبست محاسبه  $\frac{d}{dt}A^{-1}(t)$  برحسب  $\frac{d}{dt}A(t)$  و  $A^{-1}(t)$ .