به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری یازدهم

---

۱. هر یک از توابع f و g با ضابطه‌های زیر را به یک سری تیلور حول $a=0$ بسط دهید و در هر حالت شعاع همگرایی سری را محاسبه کنید. با استفاده از سری‌های به دست آمده مشتق دهم f و g را در صفر به دست آورید.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+16} \qquad g(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}.$$

۲. برای $n\geq 1$، تعریف می‌کنیم $a_n=\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

الف) نشان دهید $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

ب) نشان دهید $\lim_{n\to\infty}\frac{1-a_n}{\frac{1}{n}}=\ln 2$.

ج) در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum_n (1-a_n)$ بحث کنید.

۳. سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید برای $|x|<1$ سری فوق به $\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ همگراست.

ب) ثابت کنید برای $0<x<1$ داریم $\ln(\frac{1+x}{1-x})>2x$.

ج) به کمک قسمت قبل نشان دهید $e<3$.

۴. الف) نشان دهید انتگرال ناسره $\int_1^{\infty}(\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x}))\mathrm{d}x$ همگراست.

ب) نتیجه بگیرید که سری $\sum a_n$ که در آن $a_n=\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$، همگراست. بعلاوه اگر مجموع این سری برابر s باشد، نشان دهید $s=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n)$.

۵. در هر قسمت بازه همگرایی و مجموع سری را محاسبه کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x)^n$.

ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+3}$.

۶. با استفاده از سری توانی، مجموع سری عددی داده شده در هر قسمت را محاسبه کنید.

الف) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{\pi^n}$.

ب) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n(n+1)}{2^n}$.

ج) $1+\frac{1}{2\times 2!}+\frac{1}{4\times 3!}+\frac{1}{8\times 4!}+\dots$.

۷. مجموع سری داده شده را محاسبه کنید.

$$x^3-\frac{x^9}{3!\times 4}+\frac{x^{15}}{5!\times 16}-\frac{x^{21}}{7!\times 64}+\dots$$