

## به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱  
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴

استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری دهم

۱. حجم حاصل از دوران ناحیه  $R$  حول محور  $x$  را به دست آورید. در اینجا  $R$  ناحیه متناهی محدود به  $y = x$  و  $x = 4y - y^2$  است. اگر ناحیه  $R$  را حول محور  $y$  ها دوران دهیم حجم ناحیه چقدر می‌شود؟

۲. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه  $0 \leq y \leq 1 - x^2$  حول خط  $y = 1$  را بیابید.

۳. ناحیه  $R$  محدود به  $y = e^{-x}$  و  $y = 0$  و واقع در سمت راست  $x = 0$  یکبار حول محور  $x$  و یکبار حول محور  $y$  دوران یافته است. حجم جسم حاصل از دوران را در هر حالت بیابید.

۴. الف) نشان دهید:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1 - t^{\frac{1}{n}}}{1 + t} dt \leq \frac{1}{n + 1}.$$

ب) فرض کنید  $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} dx$ . نشان دهید  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \ln 2$ .

ج) با ذکر دلیل همگرایی سری  $\sum a_n$  را بررسی کنید.

۵. با استفاده از تابع  $f(x) = \ln x$ ، نامساوی زیر را برای عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید:

$$n^n e^{-n+1} \leq n! \leq (n+1)^{n+1} e^{-n}.$$

۶. دنباله  $\{a_n\}$  را به صورت  $a_n = \int_0^1 \sin^n(x) dx$  تعریف می‌کنیم. نشان دهید  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  و سری  $\sum_n (-1)^{n+1} a_n$  همگرا است.

۷. الف) نشان دهید اگر  $a_n > 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n \neq 0$ ، آنگاه سری  $\sum a_n$  واگرا است.

ب) اگر  $\sum a_n$  یک سری همگرا با جملات مثبت باشد، آیا  $\sum \sin a_n$  نیز همگرا است؟

۸. الف) نشان دهید برای  $x$  های مثبت، رابطه  $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$  برقرار است و با کمک آن نتیجه بگیرید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} (\sqrt[n]{n} - 1) = 1.$$

ب) سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$  به ازای چه مقادیری از  $\alpha$ ، همگرایی مطلق و یا همگرایی مشروط است؟  
 ج) به ازای  $\frac{1}{4}$ ،  $\alpha = \frac{1}{4}$ ،  $N$  را طوری بدست آورید که اگر به جای حد سری از مجموع جزئی آن  $S_n$  استفاده شود، برای  $n \geq N$  خطا از  $10^{-3}$  ناپیشتتر شود.

۹. همگرایی و واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید:

الف)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

ب)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2^n}+1}{3^{n+1}}$

ج)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

د)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ ، که در آن  $p > 0$  است.

ه)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^p}$ ، که در آن  $p > 0$  است.

۱۰. فرض کنید  $\sum a_n$  و  $\sum b_n$  دو سری همگرا با جمله‌های نامنفی باشند.

الف) ثابت کنید سری  $\sum a_n b_n$  همگرا است.

ب) فرض کنید  $\sum a_n = A$  و  $\sum b_n = B$ . با یک مثال نقض نشان دهید که لازم نیست  $\sum a_n b_n$  برابر  $AB$  باشد.

۱۱. در هر قسمت با استفاده از مفهوم انتگرال،  $n$ ی را پیدا کنید که اختلاف مجموع جزئی  $s_n$  از  $s$  کمتر از  $10^{-3}$  باشد.

الف)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

ب)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+4}$