

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۱۳۰۳-۰۴

استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری نهم

۱. در هر قسمت انتگرال خواسته شده را محاسبه کنید.

(الف) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$

(ب) $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$

(ج) $\int \sin^4 t \cos^5 t dt$

(د) $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)} dx$

(ه) $\int x \sin^3 x dx$

(و) $\int \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 4e^x + 4} dx$

(ز) $\int \frac{1}{(x-1)(x^2+9)} dx$

(ح) $\int \ln(x^2 - x + 2) dx$

(ط) $\int (\sin^{-1}(x))^2 dx$

۲. فرض کنید $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی پیوسته هستند همچنین رابطه $g(x) > 0$ برقرار است. ثابت کنید مقدار $c \in (a, b)$ وجود دارد بطوریکه:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

۳. فرض کنید تابع $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x \in [0, 1]$ تعریف کنید $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. ثابت کنید نقطه $c, 0 \leq c \leq 1$ ، موجود است که

$$F(1) - F(c) = \int_0^1 xf(x)dx.$$

۴. تابعی دوبار مشتق‌پذیر است. اگر تقعر f رو به بالا باشد و $f(0) = 0$ ، ثابت کنید برای هر $x > 0$ داریم $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{4}f(x)$

۵. فرض کنید p عددی مثبت باشد. با استفاده از تکنیک‌های انتگرال ریمان نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

۶. همگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرا بودن مقدار انتگرال را به دست آورید.

الف) $\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x+4} dx$

ب) $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

ج) $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

د) $\int_0^1 x \ln x dx$

۷. همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x - \ln x} dx$

ب) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$

ج) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{2 + e^x} dx$

د) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$

۸. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ تعریف می‌کنیم.

الف) ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t) dt = 0$ ، اما $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ همگرا نیست.

ب) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی مانند r ، عدد مثبت s وجود دارد که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-sx}^x f(t) dt = r$.