

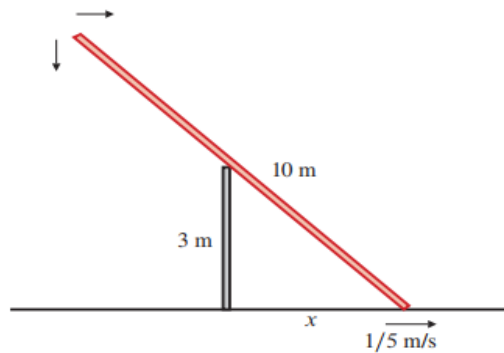
به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیمسال اول ۱۳۰۳-۰۴

استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری هشتم

۱. یک سر نردبانی به طول 10° متر بر روی زمین بوده و نردبان به یک حصار به ارتفاع ۳ متر همانند شکل تکیه دارد. اگر پای نردبان ۴ متر از پای حصار فاصله داشته و از حصار با سرعت $1/5$ متر بر ثانیه روی زمین دور شود، انتهای فوقانی آزاد نردبان با چه سرعتی به طور قائم و با چه سرعتی به طور افقی حرکت خواهد کرد؟



۲. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ چهار بار مشتق پذیر باشد و داشته باشیم $f''(a) = 0$. همچنین عدد M وجود دارد بطوریکه $f^{(4)}(x) \leq M$. ثابت کنید رابطه زیر برای هر $h \in \mathbb{R}$ برقرار است.

$$|f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)| \leq \frac{mh^4}{12}$$

۳. مقدار $\ln(\frac{9}{10})$ را با خطای کمتر از $10^{-4} \times 5$ محاسبه کنید.

۴. الف) ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - x \cos(\frac{1}{x})) = 0.$$

ب) نشان دهید معادله زیر به ازای هر $a > 0$ ، حداقل یک جواب مثبت دارد:

$$2x - x \cos(\frac{1}{x}) - a = 0.$$

۵. گوشه سمت راست پایینی در یک نوار کاغذی به عرض a سانتی متر را مانند شکل طوری برمی گردانیم که روی ضلع بالایی نوار قرار بگیرد و نیز خط تایی که به دست می آید دو ضلع مجاور نوار را قطع کند. کمترین طول ممکن برای این خط تا چقدر است؟



۶. تابع f با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

(الف) جدولی را به دست آورید که تغییرات تابع f را از نظر صعودی و نزولی بودن و نیز از نظر محدب و مقعر بودن روی کل دامنه تعریف آن مشخص کند. سپس نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی f را بیابید و نمودار تابع f را رسم کنید.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، به ازای هر عدد مثبت a اعداد e^a و a^e را از نظر بزرگی و کوچکی با هم مقایسه کنید.

۷. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ را در نظر بگیرید.

(الف) با استفاده از تقریب خطی در نقطه $x = 1$ مقدار تقریبی $f(1/0.1)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید خطا در این تقریب کمتر از 10^{-4} است.

(ج) مقدار تقریبی محاسبه شده در قسمت (الف) از مقدار واقعی $f(1/0.1)$ بزرگتر است یا کوچکتر؟ چرا؟

۸. فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دوبار مشتق پذیر باشد و به ازای هر x ، $f''(x) > 0$.

(الف) فرض کنید نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $f'(x_0) > 0$. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(ب) فرض کنید نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $f'(x_0) < 0$. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.