به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری هفتم

---

۱. فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. مقدار k را چنان پیدا کنید که انتگرال $\int_a^b (f(x)-k)^۲ \mathrm{d}x$ مینیمم شود.

۲. نقاط بحرانی تابع زیر را روی اعداد حقیقی به‌دست آورید و نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی آن را مشخص کنید.

$$F(x) = \int_{-۲}^{x^۲-۱} \sqrt[۳]{t^۳ - ۳t^۲}\, \mathrm{d}t.$$

۳. فرض کنید $f : [۰,\infty) \to [۰,\infty)$ تابعی پیوسته باشد. اگر برای هر x در دامنه داشته باشیم $(f(x))^۲ = ۱ + ۲\int_۰^x f(t)\mathrm{d}t$، ضابطه تابع f را به دست آورید.

۴. الف) فرض کنید $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر x، $f(x) \geq ۰$. اگر $\int_۰^۱ f(x)\mathrm{d}x = ۰$، ثابت کنید برای هر x، $f(x) = ۰$.

ب) فرض کنید k عددی ثابت باشد. نشان دهید تابع پیوسته $f : [۰,۱] \to \mathbb{R}$ با ویژگی‌های زیر وجود ندارد:

$$\forall x \in [۰,۱] : f(x) \geq ۰, \qquad \int_۰^۱ f(x)\mathrm{d}x = ۱,$$
$$\int_۰^۱ x f(x)\mathrm{d}x = k, \qquad \int_۰^۱ x^۲ f(x)\mathrm{d}x = k^۲.$$

۵. مساحت ناحیه محصور بین محور xها، خط واصل بین مبدا، نقطه $(\sqrt{۱+b^۲}, b)$ و شاخه سمت راست هذلولوی $x^۲ - y^۲ = ۱$ را محاسبه نمایید. در این سوال $b > ۰$ فرض شده است.

۶. تابع $f(x) = ۱ + \frac{۱}{x+۱}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید دنباله $\{f^{۲n}(۱)\}$ صعودی، دنباله $\{f^{۲n+۱}(۱)\}$ نزولی و $f^{۲n}(۱) \leq f^{۲n+۱}(۱)$

ب) حد دنباله‌های $\{f^{۲n}(۱)\}$ و $\{f^{۲n+۱}(۱)\}$ چیست؟

ج) N را طوری بگیرید که اگر به جای حد دنباله از $f^n(۱)$ استفاده شود، برای $n \geq N$ خطا از $۱۰^{-۳}$ کمتر باشد.

توجه: منظور از $f^n(x)$ ترکیب n بار تابع f با خودش است.

۷. برای هر $a > ۰$، مطلوبست محاسبه حد $\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{۱}{n}} - ۱)$.

۸. در هر قسمت حد خواسته شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\Big((۱ + \frac{۱}{n})^۵ + (۱ + \frac{۲}{n})^۵ + ... + (۱ + \frac{n}{n})^۵\Big)$.

ب) $\lim_{n\to\infty} \big(\frac{n}{n^۲ + ۱} + \frac{n}{n^۲ + ۴} + ... + \frac{n}{۲n^۲}\big)$.

ج) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} \frac{n}{n^۲ + i^۲}$.

د) $\lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{۱}{(۲n+۳)^۲ - ۱^۲} + \frac{۱}{(۲n+۶)^۲ - ۲^۲} + ... + \frac{۱}{(۲n+۳n)^۲ - n^۲}\Big)$.