

به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۱۳۰۳-۰۴

استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری ششم

۱. اگر داشته باشیم $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ مطلوبست مقدار $(f^{-1})'(2)$ را محاسبه کنید.

۲. برای هر خط $y = mx + 1$ ، بازه‌ای حول مبدا پیدا کنید که روی آن بازه داشته باشیم:

$$|e^x - (1+x)| \leq |e^x - (1+mx)|.$$

۳. این مساله نشان می‌دهد که هیچ آزمونی که فقط مبتنی بر علائم مشتق‌ها در $x=0$ باشد نمی‌تواند معین کند که هر تابع با نقطه بحرانی در $x=0$ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی یا نقطه عطف در این نقطه است. تابع زیر را در نظر بگیرید و احکام هر قسمت را ثابت کنید.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(الف) به ازای هر چند جمله‌ای P ، $\lim_{x \rightarrow 0} P(\frac{1}{x})f(x) = 0$ ،

(ب) به ازای هر $x \neq 0$ ،

$$f^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})f(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

که در آن P_k یک چند جمله‌ای است.

(ج) به ازای $k = 1, 2, 3, \dots$ ، $f^{(k)}(0) = 0$ ، موجود و برابر ۰ است.

(د) f در $x = 0$ مینیمم موضعی دارد.

(ه) هرگاه $g(x) = xf(x)$ ، آنگاه به ازای هر عدد صحیح k ، $g^{(k)}(0) = 0$ و g در $x = 0$ نقطه عطف دارد.

۴. مشتق تابع $f(x) = x - \sin^{-1}(\sin x)$ را در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ محاسبه کنید، سپس نمودار تابع را در بازه مذکور رسم کنید.

۵. فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت باشد. معادله $a^x = 1 + x$ دارای جواب $x = 0$ برای تمام مقادیر a است. آیا جواب مثبت دیگری وجود دارد؟ این مطلب را برای مقادیر مختلف a مورد بررسی قرار دهید.

۶. الف) نشان دهید تابع $f(x) = x^x$ بر بازه $[e^{-1}, \infty)$ اکیدا صعودی است.

ب) اگر g وارون تابع f در قسمت قبل باشد، نشان دهید: $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{g(y) \ln(\ln y)}{\ln y} = 1$

۷. دو دالان عمود بر هم با عرض‌های a و b که $a \leq b$ در نظر بگیرید. میخواهیم میله‌ای به طول l را در حالت افقی از دالان به عرض b به دالان به عرض a ببریم. بزرگ‌ترین مقدار l را پیدا کنید که اگر $l \leq l$ این کار امکان‌پذیر باشد.

۸. کپسول گازی به شکل استوانه با سقف نیمکره است. نسبت ارتفاع به شعاع نیمکره چقدر باشد که با حجم داده شده حداقل مصالح در ساخت کپسول به کار گرفته شود.

۹. فرض کنید تابع f برابر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ تعریف شده باشد. آیا 0 یک نقطه بحرانی f است؟ آیا f در این نقطه عطف دارد؟ آیا $f''(0) = 0$ ؟

اگر یک تابع در یک نقطه عطف خط مماس غیر قائم داشته باشد، آیا مشتق دوم آن لزوماً در آن نقطه صفر است؟