به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری پنجم

---

۱. فرض کنید $f(x)$ بر روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر باشد. بعلاوه داشته باشیم:

$$f^{۲}(b) - f^{۲}(a) = b^{۲} - a^{۲}.$$

نشان دهید $c \in (a,b)$ وجود دارید بطوریکه $f'(c)f(c) = c$.

۲. فرض کنید $f : (\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ و برای هر $x, y \in (\circ, \infty)$ داریم:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

. فرض کنید $f(x)$ در نقطه $x = ۱$ مشتق پذیر است. نشان دهید $f(x)$ برای هر $x \in (\circ, \infty)$ مشتق پذیر است و بعلاوه داریم $f'(x) = \frac{۱}{x} f'(۱)$.

۳. فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b) = \circ$. در این صورت، درستی هریک از احکام زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $c \in (a,b)$ موجود باشد به طوری که $f(c) > \circ$، آنگاه $d \in (a,b)$ وجود دارد با این ویژگی که برای هر $x \in [a,b]$، $f(x) \leq f(d)$ و $f'(d) = \circ$.

ب) اگر f دوبار مشتق‌پذیر فرض شود و برای هر $x \in [a,b]$ تساوی $f(x) = f'(x) + f''(x)$ صدق کند، آنگاه f تابع ثابت صفر است.

۴. به فرض f و g توابعی مشتق‌پذیر بر بازه I باشند و برای هر $x \in I$ نامساوی $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$ برقرار باشد. ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی f دقیقا یک ریشه تابع g وجود دارد.

۵. نشان دهید تابع $f(x) = \sin x - x$ روی اعداد حقیقی وارون‌پذیر است و این تابع وارون در سراسر اعداد حقیقی پیوسته است، ولی تابع وارون در مبدا مشتق‌پذیر نیست.

۶. فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر و $a > \circ$ باشد. ثابت کنید اعدادی مانند $c_۱$ و $c_۲$ وجود دارد، بطوریکه

$$\frac{f'(c_۱)}{a+b} = \frac{f'(c_۲)}{۲c_۲}.$$

۷. نقطه P به گونه‌ای حرکت می‌کند که در زمان t بر روی اشتراک منحنی‌های $xy = t$ و $y = tx^2$ قرار می‌گیرد. فاصله این نقطه از مبدا در زمان $t = 2$ با چه نرخی تغییر می‌کند؟

۸. ثابت کنید اگر بر روی بازه‌ای مانند I تابع مشتق‌پذیر f تقعر رو به بالا داشته باشد، آنگاه در آن بازه نمودار تابع f بالای خطوط مماس در هر نقطه قرار دارد.