به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری چهارم

---

۱. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ را محاسبه کنید.

۲. به فرض آنکه $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(2) = 9$، حدود زیر را پیدا کنید:

الف) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2+5)-f(9)}{x-2}$

ب) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{f(x)}-3}{x-2}$

۳. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x, & x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \text{ اگر} \\ x^2, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

الف) همه نقاطی را بیابید که f در آنها پیوسته است. به خصوص، آیا در $x = 0$ پیوسته است؟

ب) آیا حکم زیر درست است که به ازای هر دو عدد حقیقی a و b، x ای مابین آن‌ها وجود دارد که

$$f(x) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

ج) همه نقاطی را بیابید که در آن‌ها f مشتق پذیر است. به خصوص، آیا در $x = 0$ مشتق پذیر است؟

۴. با استفاده از قضیه مقدار میانگین مشتق نشان دهید که به ازای $x > 0$ در بازه $[0, x]$ رابطه زیر برقرار است:

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

آیا این نامساوی به ازای $x < 0$ نیز برقرار است؟

۵. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر و کراندار باشد. نشان دهید اگر $f'(x)$ تنها در تعدادی متناهی نقطه صفر شود، آن‌گاه f در بی‌نهایت حد دارد.

۶. فرض کنید f بر بازه I دوبار مشتق پذیر باشد. همچنین $f(0)=f(1)=0$ و $f(2)=1$. ثابت کنید

الف) به ازای نقطه‌ای مانند $a \in I$، داریم $f'(a)=\frac{1}{2}$.

ب) به ازای نقطه‌ای مانند $b \in I$، داریم $f''(b)>\frac{1}{2}$.

ج) به ازای نقطه‌ای مانند $c \in I$، داریم $f'(c)=\frac{1}{7}$.

۷. فرض کنید برای تابع دوبار مشتق‌پذیر $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ به ازای هر $x\in[0,1]$ داریم $|f''(x)|<1$. نشان دهید اگر $f(0)=f(1)$، آنگاه $|f'(x)|<1$ برای هر $x\in[0,1]$.

۸. فرض کنید $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0)=0$. فرض کنید برای هر $x\in(0,\infty)$، $f'(x)$ وجود داشته باشد و $f'(x)$ روی $(0,\infty)$ تابعی صعودی باشد. ثابت کنید تابع $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ نیز روی $(0,\infty)$ صعودی است.

۹. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر پیوسته است، $f(0)=f(1)=0$، $f'(0)>0$ و $f'(1)>0$. نشان دهید معادله $f'(x)=0$ حداقل دو جواب در بازه $(0,1)$ دارد.

۱۰. به فرض $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ دوبار مشتق‌پذیر باشد. ثابت کنید $-1<c<1$ وجود دارد، بطوریکه:

$$f(1)-2f(0)+f(-1)=f''(c).$$

۱۱. فرض کنید $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ دارای مشتق دوم پیوسته است، $f'(0)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. نشان دهید f'' حداقل در یک نقطه صفر می‌شود.