

به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۱۳۰۳-۰۴

استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری سوم

۱. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+1} = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1-4x^2}{1-2x} = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8 \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad (\text{ه})$$

۲. اگر f تابعی پیوسته بر بازه بسته $[a, b]$ باشد، آنگاه $R(f)$ نیز برابر یک بازه بسته در اعداد حقیقی است.

۳. فرض کنید تابع $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(0) = f(n)$. نشان دهید اعداد حقیقی $x_1, x_2 \in [0, n]$ وجود دارند، بطوریکه $f(x_1) = f(x_2)$ و $x_2 - x_1 = 1$.

۴. کوهنوردی روز پنجشنبه ساعت هشت صبح از نقطه A به سمت قله کوه حرکت می‌کند و بامداد روز جمعه به قله می‌رسد. کوهنورد پس از استراحت ساعت هشت صبح روز جمعه از قله به سمت نقطه A حرکت می‌کند و پس از طی کردن همان مسیر صعود به قله، بامداد شنبه به نقطه A می‌رسد. ثابت کنید زمانی از روز وجود دارد که کوهنورد در آن لحظه هر دو روز پنجشنبه و جمعه در یک نقطه از مسیر بوده است.

۵. به فرض تابع f بر روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a) < f(b)$. ثابت کنید اعداد c و d که $a \leq c < d \leq b$ وجود دارند که $f(c) = f(a)$ ، $f(d) = f(b)$ و برای هر $x \in (c, d)$ رابطه $f(a) < f(x) < f(b)$ برقرار است.

۶. ثابت کنید اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، $f \circ f$ نزولی اکید نیست.

۷. نشان دهید اگر $b < a^2$ ، آنگاه دو خط مماس متمایز به منحنی $y = x^2$ که از نقطه (a, b) می‌گذرد وجود دارد. اگر $b = a^2$ یا $b > a^2$ باشد، چند خط مماس بر منحنی نمودار $y = x^2$ و گذرنده از (a, b) وجود دارد؟

۸. فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند که $f(0) = g(0)$. اگر برای هر $x \in [-1, 1]$ داشته باشیم: $f(x) \geq g(x)$ ، نشان دهید $f'(0) = g'(0)$.