به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۰۳-۰۴
استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری دوم

---

۱. دو عدد حقیقی مثبت $a < b$ را در نظر می‌گیریم. دنباله $\{a_n\}$ را بصورت $a_1 = a$ ، $a_2 = b$ و برای $n > 2$ برابر $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$ تعریف می‌کنیم.

الف) نشان دهید زیر دنباله $\{a_n\}$ متشکل از اندیس‌های فرد تشکیل یک دنباله صعودی می‌دهند.
ب) نشان دهید زیر دنباله $\{a_n\}$ متشکل از اندیس‌های زوج تشکیل یک دنباله نزولی می‌دهند.
ج) نشان دهید هر جمله دنباله $\{a_n\}$ در بازه $[a, b]$ قرار می‌گیرد.
د) نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ همگرا است.

۲. به فرض X و Y مجموعه‌های ناتهی باشند و $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ دارای برد کراندار باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \sup\{h(x, y) : y \in Y\}, \quad g(y) = \inf\{h(x, y) : x \in X\}$$

نشان دهید که $\sup\{g(y) : y \in Y\} \leq \inf\{f(x) : x \in X\}$.

۳. به فرض دنباله مثبت $\{a_n\}$ دارای این خاصیت باشد که برای هر $m, p \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$a_{m+p} \leq a_m + a_p$$

ثابت کنید که:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

۴. اگر داشته باشیم $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$، آنگاه $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ را محاسبه کنید در صورتی که f تابعی زوج باشد. همین کار را برای زمانی که f تابعی فرد است انجام دهید.

۵. درست یا غلط بودن هر قسمت را مشخص کنید. در صورت درست بودن دلیل بیاورید و اگر گزاره گفته شده غلط است با یک مثال نقض آن را رد کنید.

الف) اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد، اما $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود نباشد. آنگاه $\lim_{x\to a}(f + g)(x)$ موجود نیست.
ب) اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود نباشند، آنگاه $\lim_{x\to a}(f + g)(x)$ موجود نیست.

ج) اگر $|f|$ در نقطه $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه خود f نیز در این نقطه پیوسته است.

۶. اگر $\lim_{x\to 0^+} f(x) = A$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = B$، آنگاه مقدار حد در هر قسمت را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$

ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x^2 - x^4)$

۷. اگر تابع f بر روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $a < c < b$ چنان موجود باشد بطوریکه $f(a) < f(b) < f(c)$. آنگاه ثابت کنید که بی‌نهایت زوج مانند (x_1, x_2) موجود هستند که برای آن‌ها رابطه $f(x_1) = f(x_2)$ برقرار است.

۸. الف) اگر $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $M \neq 0$، آنگاه ثابت کنید $\delta > 0$ وجود دارد بطوریکه:

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |g(x)| > \frac{M}{2}.$$

ب) همچنین با فرضیات قسمت قبل ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$