

به نام خدا

درس ریاضی عمومی ۱
نیم‌سال اول ۱۴۰۳-۰۴

استاد: دکتر محمدرضا رزوان، دکتر علیرضا رنجبرمطلق، دکتر سید رضا مقدسی

تمرین سری اول

۱. با استفاده از اصل کمال اعداد حقیقی، نشان دهید معادله $x^2 - 2 = 0$ دارای جوابی مثبت است.

۲. فرض کنید α عددی گنگ است. نشان دهید اگر دنباله اعداد حقیقی x_1, x_2, x_3, \dots به α همگرا باشد، عدد طبیعی n وجود دارد بطوریکه 1000 رقم اول در بسط اعشاری (بعد از ممیز) $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ با هم برابر هستند.

۳. فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی \mathbb{R} باشند. مجموعه $A + B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

ثابت کنید اگر A و B از بالا کراندار باشند، $A + B$ نیز از بالا کراندار است و کوچکترین کران بالای آن برابر مجموع کوچک‌ترین کران‌های بالایی A و B است.

۴. دنباله $\{a_n\}$ را چنان در نظر بگیرید که $a_1 = 3$ و $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 15}$ ، $n = 1, 2, 3, \dots$. نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ صعودی و از بالا کراندار، در نتیجه همگراست. سپس حد این دنباله را محاسبه کنید.

۵. در هر قسمت، کران‌داری (از بالا یا پایین)، مثبت یا منفی بودن، صعودی، نزولی یا نوسانی بودن و در آخر همگرایی و واگرایی دنباله را مشخص کنید.

الف) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$

ب) $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

ج) $a_n = \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$

د) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

ه) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

و) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

۶. حد دنباله‌های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$

ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})$

ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^n n}{\sqrt{n}}$

۷. الف) ثابت کنید اگر x, y اعدادی حقیقی باشند که $x < 0$ آنگاه عدد طبیعی n وجود دارد بطوریکه $nx > y$. به این خاصیت، خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی می‌گوییم.

ب) با استفاده از خاصیت ارشمیدسی ثابت کنید بین هر دو عدد حقیقی، یک عدد گویا و یک عدد گنگ وجود دارد.

ج) ثابت کنید هر عدد حقیقی حد یک دنباله از اعداد گویا و یک دنباله از اعداد گنگ است.

۸. کوچکترین کران بالایی مجموعه $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n \in \mathbb{N}\}$ را محاسبه کنید.