



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

تمرین‌های سری سیزدهم

۱. تصویر خط $y = -1$ و قرص باز $|z - 2| < 2$ را تحت اثر نگاشت $\omega = (1 + i)z - 2$ بیابید.

۲. تصویر $\frac{1}{4c} < y < 0$ ($c > 0$) را تحت اثر نگاشت $\omega = \frac{1}{z}$ بیابید. همچنین تصویر $x^2 - y^2 = 1$ را تحت اثر این نگاشت پیدا کنید.

۳. ثابت کنید تصویر $|z| = a$ تحت اثر نگاشت $\omega = z + \frac{1}{z}$ یک بیضی است ($a \neq 1$).

۴. تصویر خطوط $x = c$, $y = d$ و $ax + by = 1$ را تحت اثر نگاشت $\omega = z^2$ بیابید.

۵. تصویر میدان بین دو سهمی $r(1 - \cos \theta) = 2a^2$ و $r(1 - \cos \theta) = 2b^2$ ، $b > a > 0$ را تحت اثر نگاشت $\omega = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ بیابید.

۶. تصویر میدان $|x| < \frac{\pi}{4}$ و $y > 0$ را تحت نگاشت $\omega = \sin z$ بیابید.

۷. نگاشت میبوسی را بیابید که نقاط 0 ، 1 و ∞ را به ترتیب بر 0 ، 1 و ∞ بنگارد.

۸. اگر $z_0 > 0$ ، آنگاه نگاشت زیر نیم‌صفحه بالایی را به صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد می‌نگارد و z را به مبدأ می‌برد:

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

درباره به‌دست آوردن این نگاشت و عملکرد آن بحث کنید.

۹. اگر z_0 در داخل دیسک واحد باشد، آنگاه نگاشت

$$w = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$$

به صورت یک‌به‌یک و پوشا دیسک واحد را بر دیسک واحد و نقطه z_0 را بر 0 می‌نگارد. درباره به‌دست آوردن این نگاشت و عملکرد آن بحث کنید.