



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

تمرین‌های سری دهم

۱. بزرگ‌ترین میدانی را که تابع f با ضابطه $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$ در آن تحلیلی است، تعیین کنید. همین مسئله را برای تابع $g(z) = 2^z$ حل کنید.

۲. بزرگ‌ترین میدان‌هایی را که توابع $f(z) = \text{Log}(z - i)$ و $g(z) = \frac{\text{Log}(z+4)}{z^2+i}$ در آن‌ها تحلیلی هستند، پیدا کنید.

۳. بزرگ‌ترین میدانی را که تابع f با ضابطه $f(z) = z^z$ در آن تحلیلی است، تعیین کنید. همچنین مشتق این تابع را به دست آورید. همین مسئله را برای تابع $g(z) = \sin(\text{Log } z^2)$ حل کنید.

۴. ثابت کنید تابعی مشتق‌پذیر مانند f روی دامنه $D = \mathbb{C} - \{0\}$ وجود ندارد که $f'(z) = \frac{1}{z}$ (یعنی $\frac{1}{z}$ روی D تابع اولیه ندارد).

۵. مقدار اصلی $(1+i)^i$ و 2^{3+2i} را به دست آورید.

۶. فرض کنید c عددی مختلط است. می‌دانیم که i^c و در نتیجه $|i^c|$ بینهایت مقداری است. به ازای چه مقادیری از c ، $|i^c|$ یک مقداری است؟

۷. معادله $\tan^{-1} z = 1 + i$ را حل کنید.

۸. فرض کنید منحنی قطعه‌به‌قطعه هموار C با تابع

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

تعریف می‌شود. همچنین فرض کنید f تابعی پیوسته روی C است. آنگاه

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

۹. انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

الف) $\int_{|z|=r} x dz$

ب) $\int_{|z|=1} |z-1| dz$

ج) $\int_{|z|=1} \bar{z} dz$

۱۰. فرض کنید C نیم‌دایره بالایی دایره واحد از 1 به -1 است. انتگرال‌های زیر را حساب کنید:

الف) $\int_C e^z dz$

ب) $\int_C \text{Log}(z+2) dz$