



تاریخ: ۰۳/۹/۸
شماره:
پیوست:

دانشکده علوم ریاضی

مدت امتحان: ۳ ساعت

امتحان میان ترم معادلات دیفرانسیل (گروه‌های ۱، ۲، ۳)

۲۲-۰۳۴

نیمسال اول ۰۴-۰۳

- این امتحان شامل ۶ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچه امتحانی بنویسید و در هر برگه دفترچه فقط به یک سؤال پاسخ دهید.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.
- استفاده از ماشین حساب در طول جلسه امتحان ممنوع است.
- در طول جلسه امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

سؤال ۱. جواب مسأله مقدار اولیه زیر را به دست آورید:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 \ln t - y}{t} & (t > 0, y > 0) \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

سؤال ۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید:

$$y' = \frac{t(y+1) + (y+1)^2}{t^2} \quad (t > 0)$$

سؤال ۳. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y + t(1 + t^2 y^2) y' = 0 \quad (t > 0, y > 0)$$

(الف) عامل انتگرال‌سازی به صورت تابعی از ty برای این معادله دیفرانسیل بیابید که آن را به یک معادله دیفرانسیل کامل تبدیل کند.

(ب) جواب عمومی این معادله دیفرانسیل را به دست آورید.

سؤال ۴. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$(t^2 + t)y'' + (2 - t^2)y' - (2 + t)y = t(t + 1)^2 \quad (t > 0)$$

(الف) یک جواب معادله دیفرانسیل همگن متناظر $y_1 = \frac{1}{t}$ است. با استفاده از روش کاهش مرتبه، جواب

y_2 (مستقل خطی با y_1) از معادله دیفرانسیل همگن متناظر را به دست آورید.

(ب) با استفاده از روش تغییر پارامترها، یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل داده شده بیابید.

(ج) جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بنویسید.

سؤال ۵. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'' + y = t^2(t^2 + 12) + 10 \sin t$$

(الف) با استفاده از روش حدسی (روش ضرایب نامعین)، یک جواب خصوصی برای این معادله دیفرانسیل بیابید.

(ب) جواب عمومی این معادله دیفرانسیل را بنویسید.

سؤال ۶. فرض کنید $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی پیوسته باشند و $t_0 \in \mathbb{R}$. گیریم y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

باشند طوری که $W[y_1, y_2](t_0) = 0$ و $y_1(t_0) = 0$. ثابت کنید $y_1 = 0$ یا $y_2 = \frac{y_2'(t_0)}{y_1'(t_0)} y_1$.

توزیع نمره. سؤال ۱: ۱۵ نمره، سؤال ۲: ۱۵ نمره، سؤال ۳: ۱۰+۱۰ نمره، سؤال ۴: ۱۵+۱۵+۵ نمره، سؤال ۵: ۱۵+۵ نمره، سؤال ۶: ۱۵ نمره.

مجموع: ۱۲۰ نمره