

به نام خدا  
دانشگاه صنعتی شریف  
دانشکده علوم ریاضی



آزمون میانترم درس ریاضی عمومی ۲ (نیمسال تحصیلی ۱۴۰۳۱)

مدت امتحان: ۳ ساعت

۲۲ آذر ۱۴۰۳

- استفاده از ماشین حساب و تلفن همراه به هیچ وجه مجاز نیست.
  - امتحان دارای ۶ سوال و در دو صفحه تنظیم شده است.
  - مجموع بارم سوالات، ۱۰۰ نمره است.
۱. در کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ، سه نقطه  $A_0 = (1, 1, 1)$ ,  $A_1 = (0, 0, \sqrt{3})$ ,  $A_2 = (1, 0, \sqrt{2})$  داده شده اند. دایره های عظیمه (یعنی دایره ناشی از اشتراک کره با صفحه ی مارّ از مرکز آن) گذرنده از  $A_0$ ,  $A_1$  و  $A_2$  را به ترتیب  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  نامیم و بر حسب طول پرمایش می کنیم به گونه ای که  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = A_0$  و برای  $0 < t_1, t_2 < \pi\sqrt{3}$ ،  $\gamma_1(t_1) = A_1$ ،  $\gamma_2(t_2) = A_2$ ، مطلوبست محاسبه زاویه بین دو بردار  $\gamma_1'(0)$ ،  $\gamma_2'(0)$ . (۱۰ نمره)
۲. بردار  $(a, b, c)^T = X_0 \in \mathbb{R}^3$  داده شده است. آیا ماتریس  $A$  وجود دارد که تساوی  $AX = X_0 \times X$  برای هر  $X \in \mathbb{R}^3$  برقرار باشد؟ اگر بلی، آن ماتریس را به دست آورید و اگر خیر، برای جواب خود دلیلی ارائه کنید. (۱۰ نمره)  
توجه: منظور از نماد " $\times$ " ضرب خارجی است.
۳. اگر نور آفتاب از دور دست یک هشتم اول دستگاہ مختصات  $\{(x, y, z) | x, y, z > 0\}$ ، موازی بردار  $(-1, -1, -1)$  بتابد، مطلوبست به دست آوردن معادله (ضمنی یا پارامتری) مرز شکل حاصل از سایه کره  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$  در صفحه  $z = 0$ . (۱۰ نمره)
۴. برای تابع با ضابطه  $f(x, y) = xy \exp(-x^2 - y^2)$ ، مطلوبست محاسبه نقاط بحرانی و تعیین نوع آنها. (کمینه نسبی، بیشینه نسبی یا زینی) (۱۰ نمره)
۵. الف) با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، مساله بیشینه سازی مقید زیر را حل کنید. (۱۵ نمره)
- $$\begin{cases} \max & x^2 + y^2 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1 \end{cases}$$
- ب) بر روی بیضی گون  $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz = 1$  دو نقطه  $p_1 = (1, -1, 0)$ ،  $p_2 = (-1, 1, 0)$  و نقطه  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  روی بیضی گون را بیابید به طوری که مساحت مثلث با راسهای  $\{p_0, p_1, p_2\}$  بیشینه باشد. (۱۵ نمره)

۶. الف) برای معادله ضمنی  $e^{xz-x^2} - 3e^{zy+y^2} = 2$ ، مجموعه نقاطی را بیابید که حول آن نقاط بتوان  $z$  را برحسب تابعی از  $(x, y)$  بیان کرد. (۵ نمره)

ب) برای تابع  $z(x, y)$  در قسمت قبل، مطلوبست محاسبه نقاط بحرانی و تعیین نوع آنها. (کمینه نسبی، بیشینه نسبی یا زینی) (۱۵ نمره)

ج) مقدار کمینه نسبی و بیشینه نسبی را محاسبه و باهم مقایسه کنید. در این سوال چگونه ممکن است که مقدار کمینه نسبی تابع از مقدار بیشینه نسبی آن بیشتر باشد؟ توضیح دهید. (۱۰ نمره)

راهنمایی: نشان دهید خمی پیوسته روی سطح تراز وجود ندارد که این دو نقطه را به یکدیگر متصل کند.

موفق باشید