شماره:
تاریخ:
پیوست:

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ — ۴)

۲۹ آذر ۱۴۰۳ مدّت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. فرض کنید دنبالهٔ (a_n) به صورت زیر تعریف شده است:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + \sqrt{a_{n-1}}}{2} \qquad (n \geq 2)$$

نشان دهید این دنباله همگراست و حد آن را بیابید.

(۱۰+۵=۱۵ نمره)

سؤال ۲. فرض کنید $b > a > 0$ دو عدد حقیقی باشند و تابع $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}.$$

مقدار حدهای $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ را محاسبه کنید. هم‌چنین، نشان دهید تابع f هر مقداری از بازهٔ باز (a,b) به جز $\sqrt{ab}$ را اخذ می‌کند.

(۵+۵+۵+۵=۲۰ نمره)

سؤال ۳. فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f(0) = f(1) = 0$. نشان دهید $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد طوری که $f'(c) = 2f(c)$. (راهنمایی: از تابع e^{2x} کمک بگیرید.)

(۱۵ نمره)

سؤال ۴. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^{7/3} \sin \dfrac{1}{x} & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

نشان دهید f در تمام نقاط $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. آیا مشتق f در صفر پیوسته است؟ آیا مشتق دوم f در صفر وجود دارد؟ برای پاسخ‌های خود دلیل بیاورید.

(۱۰+۵+۵=۲۰ نمره)

سؤال ۵. تابع $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x).$$

نشان دهید f فقط و فقط یک مینیمم دارد و نقطه‌ای که این مینیمم رخ می‌دهد را بیابید.

(۱۵ نمره)

سؤال ۶. به کمک چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ دوم تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^{1/3}$ حول نقطهٔ $x_0 = 8$، مقدار $9^{1/3}$ را تقریب بزنید. نشان دهید مقدار به دست آمده کمتر از $9^{1/3}$ و میزان خطا نیز کمتر از 3×10^{-4} است.

(۱۰+۵=۱۵ نمره)

مجموع: ۱۰۰ نمره

tel: (+9821) 66005217
fax: (+9821) 66005117
P.O.Box: 11155-9415 Iran

http://math.sharif.ir
mathinfo@sharif.ir

تلفن: ۶۶۰۰۵۲۱۷(۰۲۱)
فکس: ۶۶۰۰۵۱۱۷(۰۲۱)
صندوق پستی: ۹۴۱۵-۱۱۱۵۵