دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی
Sharif University of Technology
Department of Mathematical Sciences

شماره:
تاریخ:
پیوست:

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱–۴)

۲۷ دی ۱۴۰۳ مدّت امتحان: ۳ ساعت

سؤال ۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{2x}}$، (ب) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

(۲۰=۱۰+۱۰ نمره)

سؤال ۲. حاصل حد زیر را به کمک انتگرال محاسبه کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

(۱۰ نمره)

سؤال ۳. فرض کنید $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد و دنبالهٔ (a_n) را به صورت زیر تعریف کنید:

$$a_n=\int_a^b f(x)\sin nx\,dx.$$

(الف) نشان دهید دنبالهٔ (a_n) به صفر همگراست. (راهنمایی: می‌توانید از روش انتگرال‌گیری جز به جز استفاده کنید.)

(ب) نشان دهید سری $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ همگراست.

(۱۵=۵+۱۰ نمره)

سؤال ۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دو بار مشتق‌پذیر با مشتق دوم پیوسته باشد و نیز $f(0)=f(1)=0$. نشان دهید

(الف) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)f''(x)\,dx=-2\int_0^1 f(x)\,dx$.

(ب) عدد حقیقی $0<c<1$ وجود دارد که $c(1-c)f''(c)=-2f(c)$.

(۲۰=۱۰+۱۰ نمره)

سؤال ۵. (الف) نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی $n\geq 1$، $\ln n!\geq n\ln n-n+1$.

(ب) با ذکر کامل دلایل، مقادیری از $x\in\mathbb{R}$ را بیابید که سری توانی $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ همگرای مطلق باشد.

(۲۰=۱۰+۱۰ نمره)

سؤال ۶. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2)}{x} & : x\neq 0,\\ 0 & : x=0.\end{cases}$$

(الف) نشان دهید f در هر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

(ب) تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ تعریف کنید. سری تیلور F را حول صفر بیابید و نشان دهید این سری در هر نقطهٔ $x\in\mathbb{R}$ برابر با $F(x)$ است.

(۱۵=۱۰+۵ نمره)

مجموع: ۱۰۰ نمره